PELABELAN JUMLAH OPTIMAL PADA GABUNGAN BERHINGGA GRAF BALING-BALING BERTANGKAI

[1]**Dina Indarti**
[2]**Desti Riminarsih**

[1, 2]Pusat Studi Komputasi Matematika (PSKM), Universitas Gunadarma

[1]dina_indarti@staff.gunadarma.ac.id
[2]destimath@staff.gunadarma.ac.id

ABSTRAK

Pelabelan jumlah adalah suatu pemetaan satu-satu λ dari $V(G)$ ke suatu himpunan berhingga bilangan bulat positif sedemikian sehingga untuk sembarang dua simpul, $u,v \in V(G)$ dengan label masing-masing yaitu $\lambda(u)$ dan $\lambda(v)$, uv merupakan suatu busur jika dan hanya jika $\lambda(u) + \lambda(v)$ merupakan label pada simpul lainnya di $V(G)$. Graf G yang mempunyai pelabelan jumlah disebut graf jumlah. Banyaknya simpul terisolasi minimal yang harus ditambahkan pada G agar G merupakan graf jumlah disebut bilangan jumlah dari G yang dinotasikan sebagai $\sigma(G)$. Besar bilangan jumlah $\sigma(G)$ selalu minimal sama dengan $\delta(G)$, dimana $\delta(G)$ adalah derajat minimal dari suatu graf. Graf jumlah dikatakan optimal jika $\sigma(G)=\delta(G)$. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai konstruksi pelabelan jumlah dari gabungan graf baling-baling bertangkai yang optimal.

Kata kunci: bilangan jumlah, pelabelan jumlah, gabungan berhingga graf, graf baling-baling bertangkai

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan yang bersifatkompleksdapat dijelaskan menjadi lebih sederhana.

Konsep dari pelabelan graf diperkenalkan oleh Harary (Harary, 1990). Misalkan *G* merupakan suatu graf sederhana, dengan banyaknya simpul berhingga dan tak berarah. Himpunan simpul dari graf G dinotasikan dengan *V(G)* dan himpunan busur dari graf G dinotasikan dengan *E(G)*, dimana $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ masing-masing menyatakan banyak simpul dan busur pada graf *G*. Suatu pelabelan pada graf *G=(V,E)* adalah suatu pemetaan dari $(V \cup E)$ ke himpunan bilangan bulat positif. Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang, diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, teori pengkodean, radar, desain sirkuit dan desain jaringan komunikasi.

Ada berbagai jenis pelabelan graf, salah satunya adalah pelabelan jumlah. Pada penelitian sebelumnya telah diketahui konstruksi pelabelan jumlah untuk graf hasil gabungan dari graf lingkaran dan graf *friendship* (Rusin dkk, 2006). Gabungan graf-graf lingkaran maupun graf-graf *friendship* yang saling lepas ternyata juga merupakan graf jumlah yang optimal karena gabungan graf-graf ini mempunyai bilangan jumlah sama dengan derajat minimal grafnya yaitu 2.

Graf baling-baling bertangkai merupakan graf jumlah. Hal ini telah dibuktikan oleh Indarti (Indarti danWahyuni, 2013). Oleh karena itu, pada penelitian ini dibuktikan bahwa konstruksi pelabelan jumlah pada gabungan graf baling-baling bertangkai juga merupakan graf jumlah yang optimal.

METODE PENELITIAN

Pelabelan jumlah adalah suatu pemetaan satu-satu λ dari $V(G)$ ke suatu himpunan berhingga bilangan bulat positif S sedemikian sehingga untuk sembarang dua simpul, $u,v \in V(G)$ dengan label masing-masing yaitu $\lambda(u)$ dan $\lambda(v)$, merupakan suatu busur jika dan hanya jika $\lambda(u)+\lambda(v)$ merupakan label pada simpul lainnya di $V(G)$. Graf *G* yang mempunyai pelabelan jumlah disebut graf jumlah.

Setiap simpul dengan label terbesar tidak mungkin bertetangga dengan simpul lain di graf tersebut sehingga setiap graf jumlah selalu memuat minimal 1 simpul terisolasi. Jadi graf terhubung tidak mungkin merupakan graf jumlah. Banyaknya simpul terisolasi minimal yang harus ditambahkan pada *G* agar *G* merupakan graf jumlah disebut bilangan jumlah dari *G* yang dinotasikan sebagai $\sigma(G)$. Besar bilangan jumlah $\sigma(G)$ selalu minimal sama dengan $\delta(G)$, dimana $\delta(G)$ adalah derajat minimal dari suatu graf. Graf jumlah dikatakan optimal jika $\delta(G)=\delta(G)$.

Dalam penelitiannya, Miller, Ryan, dan Smyth (Miller dkk, 2003) membuktikan bilangan jumlah untuk gabungan berhingga graf yang saling lepas seperti yang dinyatakan dalam akibat berikut.

Akibat 1

$$\sigma\left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right) \le \sum_{i=1}^{p} \sigma(G_i) - (p-1)$$

asalkan paling sedikit satu dari *p* graf yang saling lepas memiliki 1 sebagai elemen dari pelabelannya.

Dari hasil observasi terhadap pelabelan jumlah maka dapat disimpulkan hal sebagai berikut.

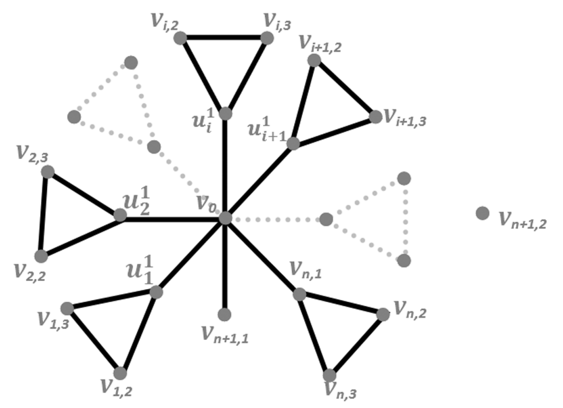
Observasi 1

Jika G_j,i = 1, ... *p* merupakan graf jumlah, maka

$$\sigma\left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right) \ge \min\left(\sigma(G_1),\ldots,\sigma(G_p)\right)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf baling-baling bertangkai merupakan pengembangan dari graf bintang.Graf baling-baling diperoleh dengan cara menambahkan suatu segitiga (C_3) pada setiap ujung simpul pada graf bintang sehingga salah satu titik sudut segitiga (C_3) tersebut berhimpit dengan ujung simpul pada graf bintang lalu tambahkan lagi satu buah busur dari titik pusat. Graf baling-baling bertangkai dengan *n* buah segitiga (C_3) dinotasikan sebagai $B_{3,n}$ (Indarti dan Wahyuni, 2013). Gambar 1 merupakan graf baling-baling bertangkai, $B_{3,n}$.



Gambar 2 Graf $B_{3,n}$

Teorema 1 (Indarti dan Wahyuni, 2010)
Graf baling-baling bertangkai, $B_{3,n}$ mempunyai bilangan jumlah (*sum number*) 1.

Berdasarkan Akibat 1, Observasi 1 dan Teorema 1 diperoleh teorema berikut.

TEOREMA 1

Misalkan $B_{n_1,3}, B_{n_2,3} \ldots, B_{n_m,3}$ merupakan *m* buah graf baling-baling bertangkai yang saling lepas dengan $n_1, n_2, .., n_m$ masing-masing menyatakan banyaknya segitiga pada graf tersebut, maka

$$\sigma\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{n_i,3}\right) = \delta\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{n_i,3}\right) = 1.$$

Bukti:
Pelabelan jumlah untuk gabungan graf baling-baling bertangkai sebagai berikut:
Misalkan $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah himpunan simpul-simpul di C_n dan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah himpunan simpul-simpul di C_m.

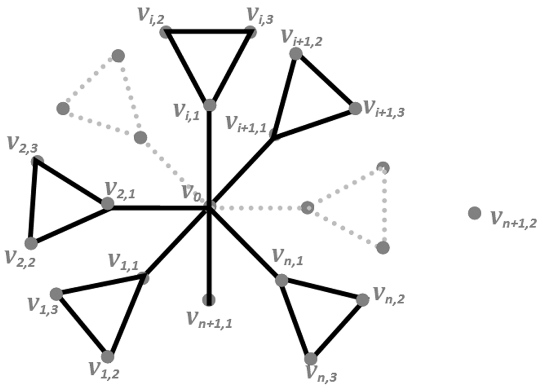
$$L(c_1) = a, L(u_1^1) = b, L(c_k) = L(c_{k-1}) + L(u_{n_{k-1}+1}^{k-1}), k = 2, \ldots, m$$
$$L(u_1^k) = L(c_k) + L(u_{n_{k-1}+1}^{k-1}) + 1, k = 2, \ldots, m$$
$$L(u_i^k) = L(u_{i-1}^k) + L(w_{i-1}^k), i = 2, \ldots, n_k + 1, k = 1, \ldots, m$$
$$L(v_i^k) = L(c_k) + L(u_i^k), i = 1, \ldots, n_k, k = 1, \ldots, m$$
$$L(w_i^k) = L(c_k) + 2L(u_i^k), i = 1, \ldots, n_k, k = 1, \ldots, m$$

Untuk memeriksa bahwa tidak ada konstruksi pelabelan yang tidak diinginkan, diperiksa sebagai berikut:

1. Pelabelan pada $B_{ni,3}$ $i = 1, \ldots, m$.

a. Pelabelan antara segitiga ke-i dengan segitiga ke-i+1.

Pelabelan pada segitiga ke-i yaitu $\{v_{i,1}; v_0 + v_{i,1}; v_0 + 2v_{i,1}\}$ dan pelabelan pada segitiga ke-i+1 yaitu $\{ v_0 + 3v_{i,1}; 2v_0 + 3v_{i,1}; 3v_0 + 6v_{i,1}\}$.



Gambar 2 Graf $B_{3,n}$

Dengan memperhatikan segitiga ke-i dan ke-i+1 pada Gambar 2, hasil penjumlahan 2 simpul $v_{i,1}$ dan $v_{i+1,1}$ yaitu $v_0 + 4v_{i,1}$, karena nilai $v_{i,1} > v_0$ dan sifat bilangan Fibonacci diperoleh $v_{i+1,1} = v_0 + 3v_{i,1} < v_0 + 4v_{i,1}$ dan $v_0 + 4v_{i,1}$ bukanlah anggota dari barisan bilangan Fibonacci yang digunakan dalam konstruksi pelabelan yang terlihat dari persamaan (1) sehingga $v_0 + 4v_{i,1}$ tidak akan ada pada label simpul manapun. Sama halnya untuk hasil penjumlahan simpul $v_{i,1}$ dengan simpul lain pada segitiga ke-i+1. Hal ini juga berlaku untuk $v_{i,2}$ dan $v_{i,3}$ jika dijumlahkan dengan simpul lain pada segitiga ke-i+1, tidak akan terhubung oleh suatu busur karena sifat bilangan Fibonacci dan hasil penjumlahannya bukan merupakan anggota barisan bilangan Fibonacci. Oleh karena itu, hasil penjumlahan 2 simpul pada segitiga yang berbeda memang tidak terhubung karena hasil penjumlahannya bukan merupakan label pada simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara segitiga ke-i dengan segitiga ke-i+1.

b. Pelabelan antara v_0 dengan $v_{i,2}$, v_0 dengan $v_{i,3}$.

$v_{i,2} = v_0 + v_{i,1}$

$v_{i,3} = v_0 + 2v_{i,1}$

diperoleh $v_{i,2} + v_0 = 2v_0 + v_{i,1}$ dan $v_{i,3} + v_0 = 2v_0 + 2v_{i,1}$. Dikarenakan sifat bilangan Fibonacci dan $v_{i,2} = v_0 + v_{i,1} < 2v_0 + v_{i,1} < v_{i,1} + v_{i,2} = v_0 + 2v_{i,1} = v_{i,3}$ maka $2v_0 + v_{i,1}$ tidak mungkin merupakan label dari simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara v_0 dengan $v_{i,2}$. Sama halnya untuk v_0 dengan $v_{i,3}$, dikarenakan sifat bilangan Fibonacci dan $v_{i,3} = v_0 + 2v_{i,1} < 2v_0 + 2v_{i,1} < v_{i,1} + v_{i,3} = v_0 + 3v_{i,1} = v_{i+1,1}$ maka $2v_0 + 2v_{i,1}$ tidak mungkin merupakan label dari simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara v_0 dengan $v_{i,3}$.

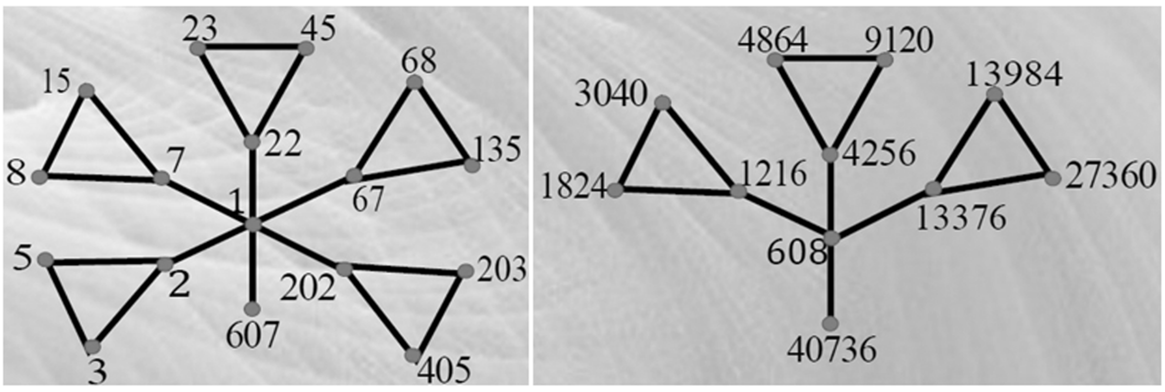
2. Pelabelan antar simpul di dengan , $i = 1, \ldots, m$.

a. Pelabelan antar segitiga di dengan , dimana $i = 1, \ldots, m$.
b. Pelabelan antara c_i dengan $v_{i,2}$, v_0 dengan $v_{i,3}$.

Berdasarkan sifat bilangan Fibonacci dan konstruksi pelabelan gabungan graf baling-baling bertangkai similar dengan konstruksi pelabelan pada satu graf baling-baling bertangkai, maka tidak akan ada busur yang menghubungkan antara simpul-simpul antar graf baling-baling bertangkai.

Berdasarkan konstruksi pelabelan yang digunakan dan $\sigma(B_{n_i,3}) = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ (Indarti dan Wahyuni, 2013), maka label simpul terisolasi yaitu $L(c_m) + L(u^{m}_{n_m+1})$

Gambar 2 merupakan contoh pelabelan jumlah pada gabungan graf baling-baling bertangkai.



Gambar 2
Pelabelan Jumlah Untuk Gabungan Dua Graf Baling-Baling Bertangkai

Simpul terisolasinya yaitu 41344.

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa gabungangraf-graf baling-baling bertangkai yang saling lepas ternyata juga merupakan graf jumlah yang optimal karena gabungan graf-graf ini mempunyai bilangan jumlah sama dengan derajat minimal grafnya yaitu 1.

Penelitian terkait konstruksi pelabelan jumlah pada graf masih dapat diekplorasi lebih lanjut untuk kelas graf lain. Selain masalah konstruksi pelabelan jumlah, pada kelas graf lain masih dapat dieksplorasi juga bilangan jumlahnya maupun bilangan jumlah gabungannya. Begitu pula masih banyak kelas graf yang belum diketahui bilangan jumlahnya. Oleh karena itu, masih terdapat banyak masalah yang dapat diteliti mengenai pelabelan jumlah pada graf.

DAFTAR PUSTAKA

Burhan, H., Rusin, R., Sugeng, K.A. 2006. Optimum sum labeling of finite union of sum graphs, RU MIPA-UI, 2006/2007.

Gallian, J.A. 2009. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(1):1-219.

Indarti, D.dan Wahyuni, I. S.. 2013. Pelabelan jumlah pada graf baling-baling bertangkai.JurnalKomputasi STIK.

Miller, M., Ryan, J dan Smyth, B. 2003. The sum number of a disjoint union of graphs, *Proceedings of Thirthteenth Australasian Workshop on Combinatorial Algorithm*, Korea, 120-124.

Rosen, K. H. 1999. Discrete Mathematics. McGraw-Hill, United States of America.

Rusin, R., Burhan, H., Sugeng, K.A. 2006. Pelabelan jumlah untuk gabungan dua graf, *Jurnal Matematika, Aplikasi dan Pembelajarannya*, 5(2):57-61.