Model Dinamo Kinematika Quasipas Menggunakan Enam Akar Positif Pertama Dari Fungsi *Spherical Bessel* $j2$ dan $j3$

ABSTRACT

Bumi memiliki medan magent yang dihasilkan oleh proses self-exited dynamo. Model dinamo kinematika dapat menggambarkan bagaimana suatu self-excited dynamo dibangkitkan dari interaksi antara aliran fluida dengan medan magnet. Namun, terdapat satu teorema antidinamo yang mengatakan bahwa aliran yang planar tidak dapat menghasilkan medan magnet, yang dikenal dengan Planar Velocity Theorem (PVT) yang diberikan oleh Zel'dovich (1957). Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2006) telah membuktikan bahwa bukti untuk PVT tidak berlaku untuk ruang konduktor dengan volume hingga. Mereka berhasil menemukan satu mode numerik yang mengindikasikan kemungkinan adanya suatu model dinamo kinematika yang memiliki aliran planar. Namun, hasil pengujian numeriknya hanya memiliki konvergensi sekitar 10%. Pada penelitian ini ditemukan model dinamo kinematika QuasiPAS yang dapat diplanarkan dengan cara memodifikasi nilai akar pada model dinamo kinematika Pakeris, Accad, Shkoller (PAS).

Kata kunci: MHD, Model Dinamo Kinematika, PAS, fungsi spherical bessel.

Nola Marina

Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Industri Universitas Gunadarma
Nola.marina@staff.gunadarma.ac.id

1. Pendahuluan

Model yang dapat membangkitkan *self-excited dynamo* disebut model *self-excited dynamo*. Hingga saat ini, model *self-excited dynamo* yang dianggap paling baik untuk menggambarkan bagaimana medan magnet bumi dihasilkan adalah *magnetohydrodynamics* (MHD) karena model ini memiliki karakteristik yang sama dengan inti bumi. Salah satu bagian dari model MHD yang hanya menyelesaikan persamaan induksi magnet dengan model aliran yang ditentukan, disebut masalah dinamo kinematika.

Berbagai penelitian telah dilakukan untuk membangun model yang dapat membangkitkan *self-excited dynamo*. Namun, terdapat juga penelitian yang menemukan kondisi-kondisi dimana *self-excited dynamo* tidak dapat dibangkitkan, yang dikenal dengan Teorema Anti Dinamo. Salah satunya adalah Teorema Aliran Planar (TAP) yang diperkenalkan oleh Zel'dovich (1957). Dalam teorema ini dikatakan bahwa, jika aliran bersifat planar atau sejajar dengan suatu bidang, maka aliran tersebut tidak dapat menghasilkan medan magnet.

Pada penelitian Bachtiar, Ivers dan James (BIJ, 2006) ditemukan model yang menjadi bukti bahwa TAP tidak berlaku untuk konduktor dengan volume hingga, sehingga dinamo aliran planar terbukti keberadaannya. Namun, hasil pengujiannya hanya memiliki konvergensi sekitar 10 %. Untuk memperkuat penemuannya tentang keberadaan dinamo aliran planar, BIJ juga mencoba melakukan pengujian terhadap model dinamo kinematika yang diberikan oleh Pekeris, Accad, Shkoller (PAS, 1973), yang dikenal dengan model PAS. BIJ menemukan bahwa model PAS tidak dapat diplanarkan. Kemudian penelitian mereka dilanjutkan oleh Bachtiar (2009) yang mencoba melakukan modifikasi terhadap model PAS untuk mendapatkan model dinamo kinematika baru yang mungkin untuk dijadikan planar, dengan harapan ditemukannya model dinamo aliran planar yang baru.

Model PAS dapat dinyatakan dalam bentuk dua bagian, yaitu poloidal dan toroidal. Kedua bagian ini mengandung fungsi $j_2(\Lambda_l r)$, dengan j_2 adalah fungsi *spherical bessel* orde dua dan Λ_l adalah nilai akar dari j_2. Model PAS tidak bisa diplanarkan pada bagian toroidal saja, sehingga dengan alasan ini Bachtiar melakukan modifikasi dengan cara mengganti bentuk fungsi yang digunakan pada bagian toroidal model PAS menjadi $j_2(\Gamma_k r)$, dengan adalah nilai akar dari (fungsi *spherical bessel* orde tiga), sehingga didapatkan model baru yang dapat diplanarkan. Model ini dinamakan model QuasiPAS.

Penelitian ini dilakukan untuk mendukung bahwa model QuasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru, dengan membuat subrutin untuk model QuasiPAS dalam pemograman fortran 95 . Pengujian numerik terhadap model QuasiPAS dilakukan dengan menggunakan 6 akar positif pertama dari fungsi *spherical bessel* j_2 dan j_3 dalam model alirannya.

1. Metode Penelitian

Teori Dinam Kinematika

Dalam penelitian (Bachtiar, 2009) didefinisikan model dinamo kinematika dengan menggunakan persamaan *pre-Maxwell* berikut:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \, \mathbf{j}. \tag{2.1}$$

$$\nabla \, . \, \mathbf{B} = 0. \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \, \partial t. \tag{2.3}$$

$$\nabla \, . \, \mathbf{E} = \mathcal{J} / \varepsilon. \tag{2.4}$$

dengan **B** adalah medan induksi magnet atau disebut juga induksi magnet/ medan magnet, **E** adalah medan listrik, $\boldsymbol{j}$ adalah kepadatan arus listrik, $\boldsymbol{\mu}$ adalah permeabilitas, $\mathcal{J}$ adalah kepadatan beban, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah konstanta dielektrik. Lambang ∇ X adalah operator curl dan ∇ adalah operator divergensi.

Kemudian, diperlukan hukum Ohm untuk menggerakkan konduktor:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{2.5}$$

dengan σ adalah daya konduksi listrik dan **v** adalah kecepatan aliran konduktor. Jika **j** pada persamaan (2.5) disubstitusi ke persamaan (2.1) , diperoleh:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{2.6}$$

Diketahui identitas berikut:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \, (\nabla . \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{2.7}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2), (2.3) dan (2.6), maka identitas (2.7) dapat diturunkan menjadi :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \, (\nabla . \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}.$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$
$$\nabla \times \big(\mu\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\big) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$
$$\mu\sigma\big(\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\big) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$
$$\mu\sigma(\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$
$$-\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$
$$-\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

sehingga diperoleh:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{2.8}$$

dengan $\eta = 1 / \mu \sigma$ adalah daya difusi magnetik.

Persamaan (2.8) disebut dengan persamaan induksi magnet. Dari persamaan (2.8) dapat dilihat bahwa pertumbuhan medan magnet **B** bergantung pada interaksi antara medan magnet dengan kecepatan aliran konduktor yang diberikan. Persamaan induksi magnet dengan model aliran yang ditentukan disebut dengan model dinamo kinematika.

Model Pekeris-Accad-Skholler (PAS)

Model PAS diperkenalkan oleh Pekeris, Accad, dan Skholler pada tahun 1973 dan didukung oleh Dudle dan James (1989). Model PAS merupakan salah satu model dinamo kinematika yang memiliki aliran yang tidak planar. Model aliran PAS didefinisikan dalam bentuk poloidal dan toroidal, sebagai berikut:

$$\mathbf{v} = 2\Re(s_2^2 + t_2^2). \qquad (2.9)$$

dengan

$$s_2^2 = K\Lambda j_2(\Lambda r). \qquad (2.10)$$

$K=\sqrt{6/5}$ adalah akar positif dari fungsi *spherical bessel* orde kedua:

$$j_2(r) = \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\sin r - \frac{3}{r^2}\cos r. \qquad (2.11)$$

3. Hasil Pembahasan

Pada penelitian ini digunakan model yang diperoleh dengan cara mengganti fungsi $j_2(\Lambda_i r)$ yang digunakan pada bagian toroidal model PAS menjadi $j_2(\Gamma_k r)$, dengan Λ_i adalah nilai akar j_2 (fungsi *spherical bessel* orde dua) dan Γ_k adalah nilai akar j_3 (fungsi *spherical bessel* orde tiga). Berikut adalah hasil modifikasi model PAS dengan cara yang disebutkan di atas:

Model aliran:

$$\mathbf{v} = 2\Re(s_2^2 + t_2^2).$$

dengan

$$s_2^2 = K\Lambda_i j_2(\Lambda_i r). \qquad (3.1)$$

$$t_2^2 = K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r). \qquad (3.2)$$

$$j_3(r) = \left(\frac{105}{r^5} - \frac{45}{r^3} + \frac{1}{r}\right)\sin r - \left(\frac{15}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\cos r. \qquad (3.2)$$

$K=\sqrt{6/5}$, Λ_i adalah akar positif ke *i* dari j_2, Γ_k adalah akar positif ke *k* dari j_3, dengan rantai magnet:

$$M02: S_1^0, T_1^0, S_2^0, T_2^0, S_2^2, T_2^2, S_3^0,$$
$$T_3^0, S_3^2, T_3^2, S_4^0, T_4^0, S_4^2, T_4^2, S_4^4, T_4^4, \ldots$$

atau

$$M12: S_1^1, T_1^1, S_2^1, T_2^1, S_3^1, T_3^1, S_3^3, T_3^3,$$
$$S_4^1, T_4^1, S_4^3, T_4^3, S_5^1, T_5^1, S_5^3, T_5^3, S_5^5, T_5^5, \ldots$$

Model aliran dengan rantai magnet di atas, untuk selanjutnya dinamakan model quasiPAS (Bachtiar, 2009).

Dapat dibuktikan bahwa model quasiPAS merupakan model yang dapat diplanarkan dengan cara menunjukkan bahwa t_2^2 memenuhi kondisi konsistensi. Dengan menggunakan formula turunan untuk fungsi *spherical bessel*, diperoleh identitas berikut:

$$\int r^{n+2} j_n(\Lambda r)\,dr = \frac{1}{\Lambda} r^n j_{n+1}(\Lambda r) + c. \qquad (3.4)$$

t_2^2 pada model quasiPAS terbukti memenuhi kondisi konsistensi (3.11), yaitu:

$$\int_0^1 r^4 t_2^2\,dr = \int_0^1 r^4 K\Lambda_i^2 j_2(\Gamma_k r)dr$$
$$= K\frac{\Lambda_i^2}{\Gamma_k} r^4 j_3(\Gamma_k r)\,|_0^1$$
$$= 0 \qquad (3.5)$$

Karena bagian poloidal model quasiPAS sama dengan bagian poloidal model PAS dan telah terbukti dapat diplanarkan, dan bagian toroidal model quasiPAS juga dapat diplanarkan, maka dapat disimpulkan bahwa model quasiPAS dapat diplanarkan.

Untuk pengujian apakah model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru, digunakan 6 akar positif pertama dari j_2 dan j_3, yaitu:

Λ = 5,7634 ; 9,0950 ; 12,3229 ; 18,6890 ; 21,8538 ; 25,0128.
Γ = 6,9879 ; 10,4171 ; 13,6980 ; 16,9236 ; 20,1218 ; 23,3042.

Aliran dari model quasiPAS ini memenuhi kondisi batas, kondisi diferensiabilitas, tapi tidak memenuhi kondisi tanpa slip.

4. Implementasi dan Hasil Pengujian

Pengujian dilakukan terhadap semua kombinasi $\Lambda_i\Gamma_k$ yang mungkin, dengan i = 1,2,...,6 dan k=1,2,...6, sehingga diperoleh 36 kombinasi. Suatu model dengan $\Lambda_i\Gamma_k$ tertentu dikatakan berhasil menghasilkan medan magnet (model dinamo kinematika) jika mendapatkan λ_{max} yang positif dan hasilnya konvergen terhadap perubahan parameter [*J*,*N*]. Pada pengujian ini bilangan Reynolds yang digunakan adalah dalam range $0 \le R \le 2,5$. Untuk melihat kekonvergenan hasil pengujian, digunakan parameter level pemotongan yang berbeda-beda, sesuai dengan yang digunakan dalam pengujian yang dilakukan Bachtiar (2009). Karena keterbatasan kapasitas komputer, level pemotongan [*J*,*N*] yang digunakan dalam pengujian ini dibatasi untuk j=100,200 dan N≤21 . Dari hasil percobaan diperoleh 8 model dengan hasil λ_{max} yang positif dan konvergen terhadap perubahan parameter [*J*,*N*] yang dapat dilihat pada Table 4.1.

Tabel 4.1
λ_{max} . untuk model quasiPAS yang berhasil untuk semua kombinasi $\Lambda_i\Gamma_k$ yang diuji, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_i\Gamma_k$	R	*N*	*J* = 100	*J* = 200
$\Lambda_1\Gamma_1$	1,65	15	0,76036	0,76630
		16	0,76537	0,76980
		17	0,75881	0,76416
$\Lambda_1\Gamma_2$	2,1	15	1,25025	1,26974
		16	1,22220	1,24373
		17	1,24935	1,26768
$\Lambda_2\Gamma_1$	0,28	11	0,54933	0,55587
		12	0,54929	0,55519
		13	0,55101	0,55678
$\Lambda_2\Gamma_2$	0,4	11	1,98293	2,00606
		12	1,97964	2,00425
		13	1,98667	2,01277
$\Lambda_2\Gamma_3$	1,05	18	0.86007	0.86007
		19	0.86007	0.86007
		20	0.86007	0.85912
		21	0.43857	0.86007
$\Lambda_3\Gamma_1$	0,25	13	0,51576	0,52869
		15	0,51348	0,52672
		16	0,51373	0,51408
$\Lambda_3\Gamma_2$	0,2	13	0,48311	0,49485
		15	0,48297	0,49474
		16	0,48294	0,49613
$\Lambda_3\Gamma_3$	0,23	11	0,36820	0,39843
		12	0,36715	0,39849
		13	0,36571	0,39776

Pada Tabel 4.2 diberikan contoh model quasiPAS yang menghasilkan λ_{max} positif, namun hasilnya tidak konvergen terhadap beberapa perubahan parameter [*J*,*N*] Sehingga, dari hasil pengujian tidak dapat disimpulkan bahwa model di bawah ini dapat menjadi model dinamo kinematika.

Tabel 4.2.
Contoh model quasiPAS yang menghasilkan λ_{max} positif namun tidak konvergen, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_i\Gamma_k$	R	*N*	*J* = 100	*J* = 200
$\Lambda_2\Gamma_4$	1,1	11	0,52882	0,57662
		12	0,45267	0,49740
		13	1,82563	1,84668
$\Lambda_3\Gamma_4$	0,56	11	0,42319	0,68953
		12	0,60397	0,86856
		15	0,23272	0,49494
$\Lambda_5\Gamma_5$	0,85	11	0,04521	12,13464
		12	14,87401	15,43850
		13	8,55566	9,50283

Sebagai contoh, perhatikan hasil pengujian untuk $\Lambda_2\Gamma_4$. Dari Tabel 4.2 dapat dilihat bahwa untuk *N*=11 dengan *N*=13 hasilnya tidak konvergen. Begitu juga dengan model $\Lambda_5\Gamma_5$, hasil untuk *j*=100 dan *j*=200 juga konvergen.

Untuk model-model yang belum konvergen tersebut masih terdapat kemungkinan untuk memperoleh hasil yang konvergen dengan cara menaikkan parameter [*J*,*N*] menjadi lebih besar. Namun, untuk menjalankannya dibutuhkan kapasitas komputer yang lebih besar dan waktu yang lebih lama.

Pada Tabel 4.3 berikut diberikan contoh model quasiPAS yang tidak dapat menghasilkan λ_{max} yang positif untuk interval $0 \le R \le 2,5$, walaupun beberapa model menunjukkan hasil yang konvergen terhadap perubahan parameter [*J*,*N*]. Namun karena λ_{max} yang ditemukan bernilai negatif, pengujian ini tetap memberikan hasil bahwa model pada Tabel 4.3 tidak dapat menghasilkan medan magnet.

Tabel 4.3.
Contoh model quasiPAS yang tidak menghasilkan λ_{max} positif, dengan rantai magnet M12.

$\Lambda_i\Gamma_k$	*R*	*N*	*J* = 100	*J* = 200
$\Lambda_1\Gamma_4$	1,5	11	- 10,64307	-10,65824
		12	-10,556101	-10,56645
		13	-10,39021	-10,40017
$\Lambda_1\Gamma_5$	0,5	11	-11,40131	-11,40080
		12	-11,29391	-11,40040
		13	-11,29415	-11,40063
$\Lambda_1\Gamma_6$	0,5	11	-11,47599	-11,47196
		12	-11,47605	-11,47556
		13	-11,47606	-11,47606

4. KESIMPULAN

Telah dilakukan pengujian terhadap model quasiPAS dengan menggunakan 36 model. Dari pengujian yang dilakukan diperoleh 8 model yang dapat membangkitkan medan magnet, sesuai hasil dari penelitian Bachtiar(Bachtiar, 2009). Sedangkan model lainnya belum berhasil membangkitkan medan magnet untuk interval $0 \le R \le 2,5$. Di antara model yang belum berhasil tersebut terdapat beberapa model yang menghasilkan λ_{max} yang positif, namun tidak konvergen terhadap perubahan parameter [*J*,*N*], sedangkan beberapa model lainnya bahkan belum berhasil menemukan λ_{max} yang positif untuk interval $0 \le R \le 2,5$. . Dengan hasil pengujian ini telah ditunjukkan bahwa model quasiPAS dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru.

Masih diperlukan penelitian numerik untuk membuktikan apakah model quasiPAS yang telah diplanarkan dapat menjadi model dinamo kinematika yang baru dengan meningkatkan parameter dan metode yang digunakan dalam pengujian numerik.

DAFTAR PUSTKA

Bachtiar, A. A. (2009). *A study of planar velocity dynamos and related issues.* PhD thesis. Sydney: The University of Sidney.

Bachtiar, A. A.& James, R. W. (2010). *Planar dynamo convergence test and application to a planar velocity dynamo*. Sydney: Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 104:5, 531–543.

Bachtiar, A. A., Ivers D. J. & James, R. W. (2006). *Planar velocity dynamos in a sphere*. London: Proc.R.Soc.Lond. A462, 2439–2456.

Bullard, E. C. & Gellman, H. (1954). *Homogeneous dynamos and terrestrial mag-netism*. London: Phil.Trans.R.Soc.Lond. A247, 213–278.

Carrigan, R.C & D. Gubbins. (1979). *The source of the earth's magnetic field.* Scientific American.

Chapman, S. & Bartels, J. (1962). *Geomagnetism* (vol. 2). Oxford: Oxford University Press. , P. A. (2001). *An introduction to magnetohydrodynamics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dudley, M. L. & James, R. W. (1989). *Time-dependent kinematic dynamos with sta- tionary ?ows.* Proc.R.Soc.Lond. A425, 407–429.

James, R.W. (1974). *The adam and elsasser dynamo integral*. London: Proc. R. Soc. Lond., A 331, 469–478.

Merrill.T. R, McElhinny. M.W, McFadden. P.L. (1998). *The magnetic field of the earth.* California: Academic Press.

Pekeris, C. L., Accad, Y. & Shkoller, B. (1973). *Kinematic dynamos and the earth's magnetic ?eld*. Proc. R. Soc. Lond. A 275, 425–261.

Tauxe, L. (2010). *Essentials of paleomagnetism*. California: University of California Press.

Zel'dovitch, Ya. B. (1957). *The magnetic ?eld in the two-dimensioned motion of a conducting turbulent liquid.* JETP, 4, 460.

Zel'dovitch, Ya. B. & Ruzmaikin, A. A. (1980). *The magnetic ?eld in a conducting ?uid in two-dimensional motion*. Sovet Phys. JETP, 51, 493–497.