ALGORITMA PRIM UNTUK MENCARI POHON RENTANGAN MINIMUM

Latifah
STIMK STIK Jakarta
Jl. Radio Dalam Jakarta Selatan

ABSTRAK

Terdapat beberapa algoritma untuk mencari pohon rentangan minimum,diantaranya adalah algoritma kruskal, algoritma solin dan algoritma prim.Algoritma kruskal dan Solin telah sering dibahas .Tulisan ini membahas mengenai algoritma prim,yaitu algoritma untuk mendapatkan jalur minimum dalam suatu pohon rentangan,yang dalam hal ini adalah untuk menentukan bagaimana kita mendapatkan jalur pengiriman suatu jenis barang dari satu kota ke kota lain dengan total ongkos seminimum mungkin.Algoritma prim ini dimulai dengan mencari harga terendah dari suatu pohon yang mengandung graf terhubung berbobot,selanjutnya pencarian harga terendah berikutnya dilakukan dengan tetap melihat ke simpul dan ruas awal dan dengan syarat tidak ditemukan sirkuit pada simpul dan ruas yang terpilih.Pencarian berhenti sampai pada n-1 simpul dan di dapat pohon rentangan minimum.Dari algoritma prim untuk mencari pohon rentangan minimum dapat dikembangkan algoritma prim untuk mencari pohon rentangan maksmum.

Kata kunci: graf, graf berbobot, ruas, simpul.

PENDAHULUAN

Seringkali dalam kehidupan sehari-hari dijumpai persoalan bagaimana menentukan jalur untuk mengirim suatu barang dari suatu kota ke kota lain dengan ongkos yang seminimum mungkin. Sebagai contoh suatu perusahaan yang bergerak di bidang jasa TI bermaksud membuat jaringan komunikasi yang menghubungkan lima buah kota yang masing-masing memiliki sebuah pusat komputer .Setiap pasang pusat komputer tersebut dapat dihubungkan dengan kabel telepon yang disewakan ke pusat.

Untuk mencari jalur pengiriman terpendek dengan ongkos total minimum,persoalan tersebut dapat dibuat modelnya dalam bentuk graf berbobot.Penyelesaian dari model graf berbobot tersebut yaitu dengan mencari suatu pohon rentangan sedemikian sehingga bobot ruas dari pohon rentangan mencapai minimum.Untuk itu perlu diperkenalkan kembali beberapa pengertian yang berkaitan dengan model tersebut, seperti pengertian graf, simpul, ruas, pohon, pohon rentangan, pohon rentangan minimum dan lain-lain.

PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan pengertian dari graf.

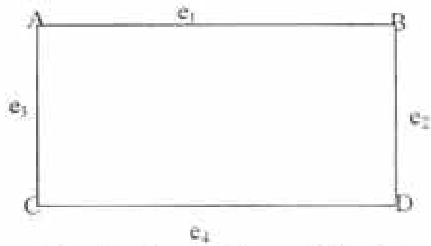
Definisi 1:
Suatu graf G,lengkapnya G=(V,E) adalah koleksi atau pasangan dua himpunan:

1. Himpunan V yang elemennya disebut simpul atau titik atau verteks.
2. Himpunan E yang merupakan pasangan tak terurut dari simpul disebut ruas atau rusuk atau sisi.

Hampir semua representasi geometri dari graf dibantu oleh suatu diagram,yang mana simpul direpresentasikan sebagai titik dan setiap ruas sebagai potongan garis yang menghubungkan simpul akhirnya. Seringkali diagram ini dinyatakan sebagai suatu graf.

Gambar 1 menyatakan graf G(V,E) dengan V mengandung 4 simpul A,B,C.D, dan E mengandung 4 ruas, yaitu e_1 = (A,B), e_2 = (B,D), e_3 = (A,C), dan e_4= (C,D).

ISSN 0216-4728



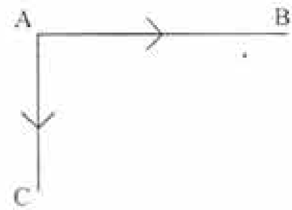
Gambar 1. contoh graf G(V,E)

Definisi 2:
Simpul u dan v disebut berdampingan, bila terdapat ruas (u,v).

Contoh : simpul A dan B pada gambar di atas disebut berdampingan karena terdapat ruas (A,B)

Definisi 3:
Suatu graf berarah, seperti yang ditunjukkan Gambar 2, ditulis D(V,E) terdiri atas 2 himpunan:

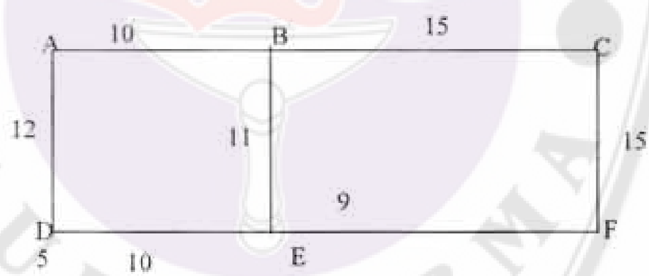
1) himpunan V yang anggotanya disebut verteks atau simpul.
2) Himpunan E yang merupakan himpunan pasangan terurut yang disebut edge atau ruas berarah atau arkus.
3)



Gambar 2. Graf berarah

Definisi 4:
Suatu graf G disebut graf berbobot jika ruas dan/atau simpulnya dikaitkan dengan suatu besaran tertentu.Khususnya jika setiap ruas e dari G dikaitkan dengan suatu bilangan bukan negatif d(e),maka d(e)n disebut bobot atau panjang ruas e.

Contoh:
Pada graf gambar di bawah ini simpul menyatakan kota dan label/bobot d(e) menyatakan jarak antara dua kota.



Gambar 3. Graf berbobot

Definisi 5 :
Perjalanan pada suatu graf G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti:

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$$

Di sini ruas e_i menghubungkan simpul v_i dan v_{i+1}. Perjalanan dapat ditulis lebih singkat dengan hanya menulis barisan ruas $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ atau barisan simpul $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$

Definisi 6:
Dalam hal di atas v_1 disebut simpul awal dan v_n disebut simpul akhir dari perjalanan.Banyaknya ruas dalam barisan disebut panjang perjalanan.

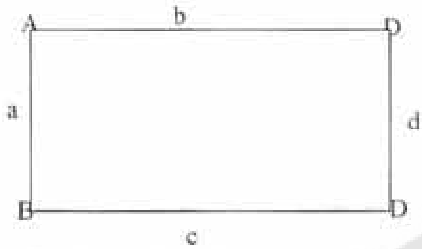
Definisi 7:
Perjalanan disebut perjalanan tertutup bila $v_1 = v_n$,dalam hal lain disebut perjalanan terbuka yang menghubungkan v_1 dan v_n.

Definisi 8:
Lintasan atau trail adalah perjalanan dengan semua ruas dalam barisan adalah berbeda.

Definisi 9:
Jalur atau path adalah perjalanan yang semua simpul dalam barisan adalah berbeda.

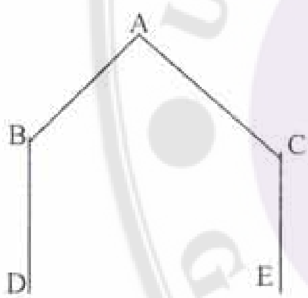
Dari definisi lintasan dan jalur di atas, maka jalur pasti lintasan.

Definisi 10:
Sirkuit adalah suatu lintasan tertutup dengan derajat setiap simpul dua. Sirkuit dengan panjang k disebut sirkuit–k. Pada Gambar 4 di bawah a, b, d, c adalah sirkuit.



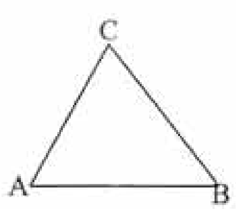
Gambar 4. Contohs ebuah sirkuit

Definisi 11:
Suatu graf yang tidak mengandung sirkuit disebut acyclic.
Contoh dari graf asiklik adalah pohon. Gambar 5 menunjukkan sebuah graf asiklik.



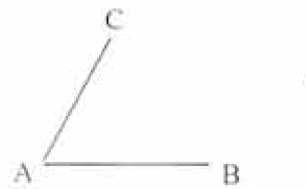
Gambar 5. Contoh graf asiklik

Definisi 12:
Suatu graf disebut terhubung bila untuk setiap dua simpul dari graf G, selalu terdapat jalur yang menghubungkan kedua simpul tersebut, seperti yang ditunjukkan Gambar 6.



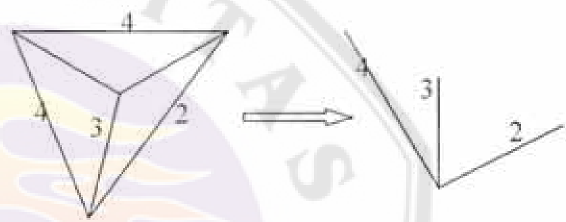
Gambar 6. Graf terhubung

Definisi 13:
Suatu pohon T dikatakan suatu pohon rentangan dari suatu graf terhubung G, jika T adalah subgraf dari G dan T mengandung semua simpul dari G.



Gambar 7. Contoh pohon rentangan

Definisi 14:
Suatu pohon rentangan minimum dalam suatu graf berbobot terhubung adalah suatu pohon rentangan yang mempunyai jumlah bobot terkecil dari ruas-ruasnya.



Gambar 8. Contoh pohon rentangan minimum graf berbobot terhubung

Ada banyak algoritma untuk membentuk pohon rentangan minimum, diantaranya algoritma Kruskal ,solin dan algoritma prim. Algoritma-algoritma tersebut membuat pohon rentangan minimum dengan menambah secara berurutan ruas dengan bobot terkecil dengan ruas yang mempunyai sifat tertentu, dalam hal ini ruas yang tidak membentuk sirkuit. Ruas yang mengandung sirkuit kemudian tidak lagi digunakan.

Adapun langkah-langkah dari algoritma Prim adalah sebagai berikut:

1. Memilih sebarang ruas dengan bobot terkecil.
2. Menempatkan ruas tersebut ke dalam pohon rentangan.
3. Secara berurutan menambahkan ke pohon ruas-ruas dengan bobot terkecil yang berkaitan dengan simpul yang sudah ada dalam pohon tersebut dan tidak membentuk sirkuit

ISSN 0216-4728

dengan ruas yang sudah ada dalam pohon.

4. Mengakhiri langkah jika n-1 ruas telah ditambahkan.

Perlu diperhatikan, bahwa pemilihan dari ruas untuk menambahkan pada setiap langkah dari algoritma tidak ditentukan. Jika terdapat lebih dari satu ruas dengan bobot minimum yang sama yang memenuhi kriteria yang tepat, maka perlu mengurutkan ruas untuk membuat pilihan tertentu. Tidak perlu dikhawatirkan mengenai sisa dari pilihan ini. Perlu diperhatikan juga mungkin terdapat lebih dari satu pohon rentangan minimum untuk graf sederhana berbobot yang terhubung.

Algoritma prim memproduksi suatu pohon rentangan minimum dari suatu graf berbobot yang terhubung.

Bukti. Misalkan G adalah suatu graf berbobot terhubung dengan n simpul. Misalkan pula ruas-ruas berurutan yang dipilih oleh algoritma prim adalah e_1, e_2,..e_{n-1}.

S = pohon dengan ruas $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$

S_k = pohon dengan ruas $e_1, e_2, \ldots, e_k$

T =pohon rentang minimum dari G yang mengandung ruas $e_1, e_2, \ldots, e_k$

K = bilangan bulat maksimum dengan sifat bahwa pohon rentangan minimum ada dan mengandung ruas sebanyak k pertama yang dipilih oleh algoritma prim.

Akan dibuktikan S =T. Misalkan $S \neq T$ maka k < n-1, akibatnya T mengandung e_1, e_2,...e_k, tetapi tidak mengandung e_{k+1}. Perlu diperhatikan bahwa graf G yang dibentuk dari T bersama-sama dengan e_{k+1} karena graf ini terhubung dan mempunyai ruas sebanyak n, maka hal ini terlalu banyak untuk suatu pohon; dengan demikian, pasti mengandung suatu sirkuit. Sirkuit ini pasti mengandung e_{k+1} karena tidak ada sirkuit sederhana dalam T. Lebih lanjut terdapat satu ruas dalam sirkuit sederhana yang tidak dimiliki oleh S_{k+1}, karena S_{k+1} adalah pohon. Dengan memulai pada titik ahir dari e_{k+1} yang juga titik ahir dari salah satu $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dan mengikuti sirkuit sampai dicapai suatu ruas yang tidak di dalam S_{k+1}, kita dapat menentukan suatu ruas e yang tidak di dalam S_{k+1} yang mempunyai titik akhir yang juga titik ahir dari salah satu ruas e_1, e_2,...e_k.

Dengan menghapus e dari T dan menambahkan e_{k+1}, kita mendapatkan suatu pohon T' dengan n-1 ruas (T' adalah suatu pohon karena tidak mengandung sirkuit). Perhatikan bahwa T' mengandung $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$. Lebih lanjut karena e_{k+1} dipilih oleh algoritma Prim pada langkah ke (k+1) dan e sudah tersedia dalam langkah tersebut, maka bobot e_{k+1} = bobot e_k. Jadi T' juga pohon rentangan minimum, karena jumlah bobot ruas dari T' tidak melebihi jumlah bobot ruas dari T. Hal ini kontradiksi dengan pemilihan k sebagai bilangan bulat maksimum. Sedemikian sehingga terdapat pohon rentangan minimum dan mengandung e_1, e_2,..., e_k maka k =n-1 dan S=T. Jadi algoritma prim memproduksi suatu pohon rentangan minimum.

Pseudo code algoritma Prim di atas adalah sebagai berikut:

```
Procedur Prim (G=graf terhubung berbobot tak
berarah dengan n verteks)
T:= edge dengan bobot minimum
For I:= 1 to n-1
Begin
  e:= suatu edge dari bobot minimum yang
terjadi dari suatu verteks dalam T dan tidak
membentuk suatu sirkuit sederhana dalam T
jika ditambahkan ke T
  T:= T+e
End{ T adalah suatu minimum spanning tree
dari G}
```

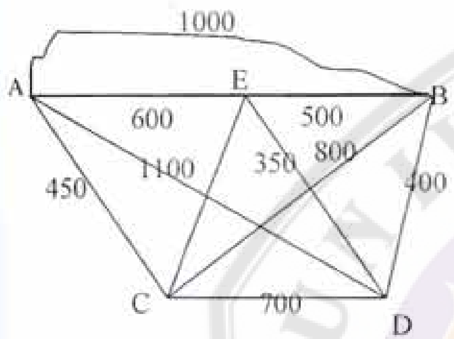
Kasus Penggunaan

Dari pendahuluan di atas telah dijelaskan bahwa suatu perusahaan yang bergerak di bidang jasa TI akan membuat jaringan komunikasi di 5 kota. Akan ditentukan ongkos minimum. Jaringan komunikasi yang menghubungkan semua komputer digambarkan dalam Gambar 9. Satuan bobot dinyatakan dalam ribuan rupiah.

Dalam penyelesaian, untuk memudahkan buat suatu tabel, seperti yang ditunjukkan Tabel 1.

Tabel 1.
Jarak antar lokasi (dalam ribuan rupiah)

Nama kota	A	B	C	D	E
A	X	600	450	1100	1000
B	600	x	650	350	500
C	450	650	x	700	800
D	1100	350	700	X	400
E	1000	500	800	400	X



Gambar 9. Jaringan komunikasi yang menghubungkan semua komputer.

Menggunakan algoritma Prim, permasalahan itu akan diselesaikan dengan cara berikut.

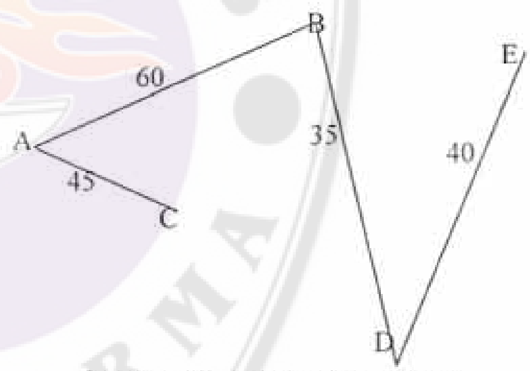
1. Ruas dengan bobot terendah adalah (B,D), yaitu sebesar 350, maka ruas ini menjadi ruas yang pertama.

2. Ruas dengan bobot terendah berikutnya adalah ruas (D,E), yaitu sebesar 400

3. Ruas dengan bobot terendah berikutnya yang berkaitan dengan pohon pada langkah 1 dan 2, tapi yang tidak membentuk suatu sirkuit adalah ruas (B,A), yaitu sebesar 600. Ruas (B,E) tidak dipilih walaupun mempunyai bobot minimal yaitu 500. Hal ini dikarenakan ruas (B,E) membentuk sirkuit dengan ruas (B,D) dan (D,E).

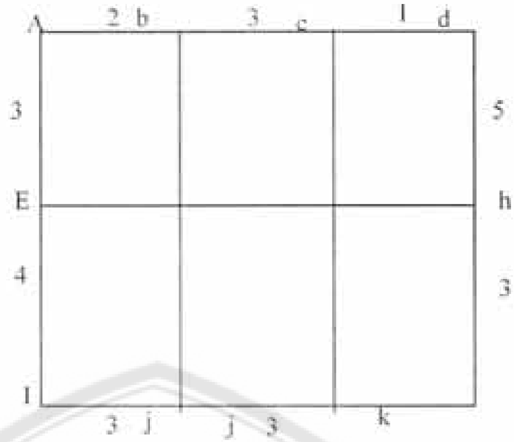
4. Langkah 3 diulangi, maka akan terpilih ruas (A,C) yaitu sebesar 450. Ruas lain tidak dapat dipilih karena membentuk sirkuit.

5. Langkah terakhir adalah menjumlahkan semua bobot ruas yang terpilih di atas, sehingga didapat pohon rentangan minimum, yaitu total sebesar 1800, dan algoritma berhenti sampai tercapai sebanyak 4=n-1=5-1 pilihan. Jaringan komunikasi yagn sebiknya dibangun dengan demikian untuk biaya paling minimum dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 10. Jaringan komunikasi

Telah dibicarakan di atas seringkali timbui persoalan terdapat lebih dari satu ruas dengan minimum bobot yang sama dan memenuhi kriteria yang telah ditentukan oleh algoritma prim tadi. Untuk itu perlu diurutkan nilai minimum tersebut dan dipilih salah satu saja. Jadi terdapat lebih dari satu pohon rentang minimum.



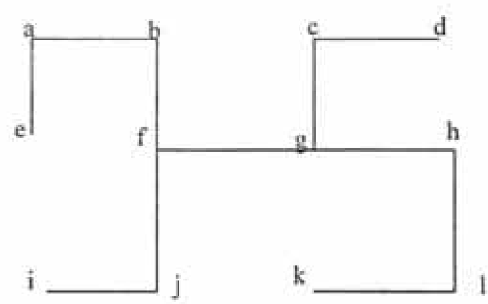
Gambar 11. Hasil pengurutan dari nilai minimum

Tabel 2.
Hasil pengurutan dari nilai minimum

Simpul	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	L
a		2			3							
b	2		3			1						
c		3		1			2					
d			1					5				
e	3					4			4			
f					4		3			2		
g						3		3			4	
h							3					3
i					4					3		
j						2					3	
k							4			3		1
l								3			1	

Dengan menggunakan algoritma prim di dapat :
Pilihan 1 adalah ruas (b,f)= 1
Pilihan 2 adalah ruas (b,a)=2
Pilihan 3 adalah ruas (f,j)=2,
Pilihan 4 adalah ruas (a,e)=3(ruas (f,e) tidak dipilih karena membentuk sirkuit)
Pilihan 5 adalah ruas (I,j)=3
Pilihan 6 adalah ruas (f,g)=3 (ruas (e,I) tidak dipilih karena membentuk sirkuit)
Pilihan 7 adalah ruas (c,g)=2
Pilihan 8 adalah ruas (c,d)=1
Pilihan 9 adalah ruas(g,h)=3
Pilihan 10 adalah ruas (h,l)=3 (ruas(d,h) tidak dipilih karena membentuk sirkuit)
Pilihan 11 adalah ruas (k,l)=1

Jadi pilihan berhenti pada n-1=12-1=11. Pilihan dengan ongkos minimum sebesar 24
Pohon rentangan minimum dari persoalan di atas dapat dilihat pada Gambar 13.



Gambar 13. Pohon rentang minimum jalur komunikasi

Jika persoalan yang ditemukan adalah mencari keuntungan maksimum, maka digunakan pohon rentangan maksimum. Algoritma prim untuk pohon rentangan maksimum sama dengan algoritma prim untuk pohon rentangan minimum dengan mengganti ruas yang mempunyai bobot minimum dengan bobot maksimum.

Definisi 15:
Suatu pohon rentangan maksimum dari graf berbobot terhubung yang tak berarah adalah suatu pohon rentangan dengan kemungkinan bobot terbesar.

Pseudocode Algoritma prim untuk pohon rentangan maksimum adalah sebagai berikut:

```
Procedure Prim(G: graf berlabel terhubung
yang tidak berarah dengan n verteks)
T:= edge dengan bobot maksimum
Or I:= 1 to n-1
Begin
E:= suatu edge dengan bobot maksimum yang
terjadi dari suatu verteks dalam T dan tidak
membentuk suatu sirkuit dalam T jika
ditambahkan pada T.
T:= T dengan ditambah edge e
End {T adalah suatu maksimum spanning tree
dari G}
```

KESIMPULAN

Algoritma Prim dapat digunakan untuk mencari pohon rentangan minimum dan maksimum, tapi terdapat kekurangan pada algoritma ini,yaitu setelah didapat harga awal yang minimum atau maksimum pencarian harga minimum atau maksimum yang lain tetap harus memeriksa kembali ruas awal lainnya,sehingga tidak terdapat sirkuit,yang mana hal ini cukup sulit dan memori komputer yang dibutuhkan cukup besar. Untuk itu mencari pohon rentangan minimum dapat menggunakan algoritma lain.

DAFTAR PUSTAKA

Deo, Narsingh, *Graph Theory With Applications To Engineering And Computer Science*, Prentice Hall of India,New Delhi. 1987

Rosen, H Kenneth, *Discrete Mathematics and Its Apllications*,WCB,McGraw Hill,Boston, 1999

Suryadi, *Teori Graf Dasar*, Penerbit Gunadarma,Jakarta,1996