ISSN 0216-4728

TOPOLOGICAL SORTING

Latifah
latifah@stmik-jakarta.ac.id

ABSTRAK

Misalkan sebuah proyek pekerjaan dibangun dari 25 jenis tugas yang berbeda.Beberapa tugas dapat dikerjakan bila sesudah tugas sudah diselesaikan.Bagaimana urutan tugas dapat diselesaikan?.Untuk membuat model dari persoalan ini kita dapat membangun suatu partial order pada himpunan tugas-tugas,sedemikian sehingga a< b jika dan hanya jika a dan b adalah tugas-tugas dan tugas b tidak dapat dimulai sampai tugas a telah diselesaikan.Untuk membuat jadwal dari proyek tersebut,kita memerlukan suatu urutan untuk semua 25 tugas yang disebut urutan topological (topological sorting).

Kata kunci: *partial order, diagram hasse, elemen maksimal, elemen minimal, topological sorting.*

PENDAHULUAN

Salah satu penggunaan relasi dalam menyelesaikan suatu proyek pekerjaan adalah dengan menggunakan TOPOLOGICAL SORTING. Sebelum masuk ke pembahasan apa dan bagaimana topological sorting tersebut, perlu diperkenalkan apa yang disebut diagram hasse. Untuk itu diberikan pengertian-pengertian yang berkaitan dengan diagram Hasse.

PEMBAHASAN

RELASI.

DEFINISI 1: Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan.
Suatu relasi biner dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari AxB.

Contoh: Misalkan A={0,1} dan B ={a,b,c},maka {(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)} adalah relasi dari A ke B.

DEFINISI 2: Suatu relasi pada himpunan A adalah suatu relasi dari A ke A

DEFINISI 3: Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan refleksif jika (a,a)∈ R untuk setiap a∈A.

Contoh:Perhatikan relasi-relasi pada A=(1,2,3,4) sebagai berikut:
R = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}
H ={(1,1),(1,2),(2,1)}
F={(1,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)}
I={(1,2),(2,2),(3,3),(4,4),(2,1)}
J={(1,1),(2,2),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}

F dan J adalah relasi refleksif karena mengandung elemen (1,1),(2,2),(3,3),(4,4) dan R,H,I bukan relasi refleksif.

DEFINISI 4: Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan simetrik jika (b,a)∈ R dan (a,b)∈ R untuk a,b ∈ A. Suatu relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga (a,b)∈ R dan (b,a)∈ R hanya jika a=b untuk a,b ∈ A,dikatakan anti simetrik.

Contoh:
Dari contoh di atas yang merupakan relasi simetrik adalah relasi H, karena (a,b)∈ R dan (b,a)∈ R juga, sedangkan relasi yang lain tidak.

DEFINISI 5: Suatu relasi R pada himpunan A disebut transitif jika (a,b)∈ R dan (b,c)∈ R maka (a,c) ∈ R untuk a,b,c ∈ A.

Contoh: dari contoh di atas relasi J adalah relasi transitif, sedangkan relasi yang lain tidak.

DEFINISI 6:
Suatu relasi R pada himpunan S disebut suatu partial order jika relasi tersebut refleksif, antisimetrik dan transistif. Suatu himpunan S bersamaan dengan partial order R disebut partially order set atau poset dan dinotasikan dengan (S,R).

Contoh: Buktikan bahwa relasi "lebih besar atau sama dengan" ($\geq$) adalah suatu partial order pada himpunan-himpunan bilangan bulat (integer)= Z.
Jawab: karena $a \geq a$ untuk setiap bilangan bulat a,maka $\geq$ adalah refleksif.
Jika $a \geq b$ dan $b \geq a$,maka $a = b$,dengan demikian $\geq$ anti simetrik. Selanjutnya $\geq$ adalah transitif karena $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$. Hal ini membuktikan bahwa $\geq$ adalah suatu partial order pada himpunan bilangan bulat dan $(Z,\geq)$ adalah suatu poset.

Kita sering menggunakan relasi untuk mengurutkan beberapa atau keseluruhan elemen dari himpunan-himpunan. Sebagai contoh, kita urutkan kata-kata yang menggunakan relasi yang mengandung pasangan kata (x,y) di mana x muncul sebelum y dalam suatu kamus. Kita menjadwalkan proyek-proyek dengan menggunakan relasi yang mengandung pasangan (x,y) di mana x dan y adalah tugas-tugas dalam suatu proyek sedemikian sehingga x harus diselesaikan sebelum y dimulai. Kita urutkan himpunan bilangan integer dengan menggunakan relasi yang mengandung pasangan (x,y) dimana x lebih kecil atau sama dengan y. Jika kita tambahkan semua pasangan yang berbentuk (x,x) ke relasi-relasi ini, maka kita dapatkan bahwa relasi tersebut adalah relasi refleksif, antisimetrik dan transitif.

DEFINISI 7:
Elemen-elemen a dan b dari suatu poset $(S,\leq)$ disebut comparable jika salah satu $a \leq b$ atau $b \leq a$. Jika a dan b adalah elemen-elemen dari S sedemikian sehingga a tidak lebih kecil atau sama dengan b dan b idak lebih kecil atau sama dengan a, maka a dan b disebut incomparable.

Contoh: Dalam poset $(Z, |)$, dengan Z=himpunan bilangan bulat dan $|$ adalah notasi pembagi. Apakah bilangan bulat 3 dan 9 comparable? Dan apakah 5 dan 7 comparable?
Jawab: bilangan 3 dan 9 comparable karena $3 | 9$, tapi 5 dan 7 incomparable karena $5 | 7$ atau $7 | 5$.

DEFINISI 8:
Jika $(S,\leq)$ adalah suatu poset dan setiap dua elemen dari S adalah comparable, S disebut suatu totally order atau linerly order set dan $\leq$ disebut suatu total order atau linier order. Suatu totally order disebut Chain.

Contoh:
Z=himpunan bilangan bulat. Poset$(Z,\leq)$ adalah totally order karena $a \leq b$ atau $b \leq a$ jika a dan b bilangan bulat.
Poset $(Z, |)$ bukan totally order karena Z mengandung elemen yang incomparable.

DEFINISI 9:
$(S,\leq)$ adalah suatu himpunan yang well ordered jika ia adalah suatu poset sedemikian sehingga $\leq$ adalah suatu total order dan sedemikian sehingga setiap subset yang tidak hampa dari S mempunyai elemen paling sedikit.

Contoh:
$(Z, \leq)$,dengan $\leq$ adalah tanda lebih kecil atau sama dengan seperti biasanya merupakan suatu well-order .

LEXICOGRAPHIC ORDER

Kata-kata dalam suatu kamus disusun dengan urutan abjad atau lexicographic, yaitu berdasarkan urutan huruf-huruf dalam alfabet. Hal ini merupakan hal khusus dari suatu urutan suatu string pada suatu himpunan yang dibangun dari suatu partial order pada himpunan tersebut. Akan diperlihatkan bagaimana bentuk ini bekerja dalam sebarang poset.

Pertama-tama akan diperlihatkan bagaimana membangun suatu order partial pada perkalian cartesian dari dua poset, yaitu poset $(A,\leq)$ dan $(B,\leq)$.

Lexicographic order pada $\leq$ pada A x B didefinisikan dengan menentukan bahwa salah satu pasang lebih kecil dari pasangan lain jika elemen pertama dari pasangan pertama lebih kecil dari elemen pertama dari pasangan kedua, atau jika elemen pertama sama besar dengan elemen pertama dari pasangan kedua, tapi elemen kedua dari pasangan pertama lebih kecil dari elemen kedua pasangan kedua.

Dengan perkataan lain $(a,b)\leq (c,d)$,yaitu $(a,b) < (c,d)$ jika $a<c$ atau keduanya $a=c$ dan $b<d$.

Partial order $\leq$ didapat dengan menambahkan sama dengan ke order < pada

AX B.

Lexicographic order dapat didefinisikan pada perkalian cartesian dari n poset $(A_1, \leq)$, $(A_2, \leq)$, ..., $(A_n, \leq)$. Definisikan partial order $\leq$ pada $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ dengan $(a_1, a_2, ..., an) < (b_1, b_2, ..., b_n)$ jika $a_1 < b_1$, atau jika terdapat integer $I > 0$ sedemikian sehingga $a_1 = b_1, ..., a_i = b_i$ dan $a_{i+1} < b_{i+1}$, dengan perkataan lain salah satu n-tuple lebih kecil dari n tuple kedua jika elemen-elemen n tuple pertama dalam posisi pertama di mana n-tuple kedua tidak,adalah lebih kecil dari elemen dalam posisi dalam n-tuple kedua.

Contoh: perhatikan bahwa (1,2,3,5) <(1,2,4,3),karena elemen-elemen dalam posisi kedua dari 4- tuple pertama yaitu1,2,3,4 benar,tapi dalam posisi ketiga elemen dari tuple pertama yaitu 3 lebih kecil dari posisi ketiga 4- tuple kedua yaitu 4 (disini urutan pada 4- tuple adalah lexicographic yang berasal dari relasi "lebih kecil atau sama dengan" seperti biasanya dalam himpunan bilangan bulat).

Sekarang dapat didefinisikan urutan lexicographic dari string. Perhatikan string $a_1, a_2, ..., a_m$ dan $b_1, b_2, ... b_n$ pada partial order S. Misalkan string ini tidak sama. Misalkan pula m dan n mempunyai minimum t.

Lexicographic order adalah bahwa string $a_1, a_2, ... a_m$ lebih kecil dari $b_1, b_2, ..., b_n$ jika dan hanya jika $(a_1, a_2, ..., a_t) < (b_1, b_2, ... b_t)$ atau $(a_1, a_2, ..., a_t) = (b_1, b_2, ... b_t)$ dan $m<n$, dimana < pada pertidak samaan ini menyatakan oerder lexicographic dari S. Dengan perkataan lain untuk menentukan urutan dari dua string yang berbeda, string yang lebih panjang ditambah ke string yang lebih pendek, yaitu $t=\min(m,n)$. Selanjutnya n-tuple yang terbentuk dari suku ke t dari masing-masing string dibandingkan dengan menggunakan lexicographic order pada S. Salah satu string lebih kecil dari string yang lain jika t- tuple yang bersangkutan dengan string pertama lebih kecil dari t-tuple string kedua, atau jika 2 t-tuple ini sama tapi tidak dengan string kedua yang lebih panjang.

Contoh:
Discreet < discrete, karena string pertama berbeda pada posisi ketujuh dan e <t. Demikian pula dengan Discreet<discreetness, karena 8 huruf pertama benar tapi string kedua lebih

panjang. Lebih lanjut,discrete<discretion karena discrete < discreti.

DIAGRAM HASSE.

Sebelum membahas mengenai Diagram HASSE perlu diperkenalkan pengertian graf dan directed graf.

DEFINISI 10 :

Suatu graf G(V,E) adalah koleksi pasangan 2 himpunan yaitu verteks dan edge.

DEFINISI 11:

Suatu graf disebut graf berarah (directed grph) bila graf tersebut terdiri dari verteks dan edge yang mempunyai arah.

Sebarang edge dalam suatu graf berarah untuk setiap poset hingga tidak perlu diperlihatkan karena pasti ada. Sebagai contoh perhatikan graf berarah untuk partial order $\{(a,b)/a \leq b\}$ pada himpunan {1,2,3,4} seperti pada gambar 1. Karena relasi ini adalah suatu relasi partial order, maka ia refleksif, anti simetrik dan transitif dan graf berarahnya mempunyai loop di semua verteks. Akibatnya,kita tidak perlu membuktikan loop ini karena mereka ada, pada gambar 1,loop tidak diperlihatkan. Selanjutnya karena relasi ini transitif kita tidak perlu memperlihatkan edge-edge yang ada karena sifat transitifitasnya. Sebagai contoh pada gambar 1 edge (1,3), (1,4) dan (2,4) tidak diperlihatkan karena mereka ada. Jika kita asumsikan bahwa semua titik mengarah keatas (lihat gambar1), kita tidak perlu memperlihatkan arah dari edge-edge tersebut (gambar 1 tidak memberikan arah).

Gambar 1

Secara umum, kita dapat merepresentasikan suatu partial order pada himpunan hingga dengan menggunakan prosedur berikut:

1. Mulai dengan graf berarah untuk relasi ini.
2. Karena suatu partial order adalah relasi refleksif, maka terdapat suatu loop pada setiap vertex, kemudian hapus loop ini.
3. Selanjutnya hapus semua edge yang ada karena sifat transitifitas, sebagai contoh jika (a,b) dan (b,c) ada dalam partial order, hapus edge (a,c), karena pasti ada edge (a,c) ini, selanjutnya jika (c,d) juga ada dalam partial order, hapus edge (a,d).
4. Atur setiap edge sedemikian sehingga vertex awal dibawah vertex akhir.
5. Hapus semua panah pada graf berarah,karena semua titik edge menghadap keatas terhadap vetex akhir.

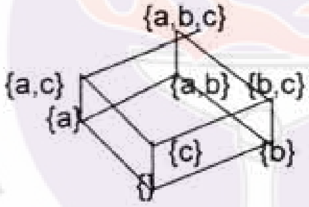
Langkah-langkah ini aalah well-defined dan hanya beberapa langkah dibawa

ISSN 0216-4728

untuk poset hingga. Jika semua langkah telah diambil, diagram hasil mengandung informasi yang cukup untuk menemukan partial order. Diagram ini yang disebut dengan DIAGRAM HASSE.

Contoh:
Gambarkan diagram Hasse yang merepresentasikan partial order {(A,B) / A $\subseteq$B} pada kuasa himpunan P(S) dengan himpunan S={a,b,c}.

Jawab: Diagram Hasse untuk partial order ini didapat dari graf berarah yang bersangkutan dengan menghapus semua loop dan semua edge yang terbentuk dari transitifitas.
Sebut {{},{a,b}},{{},{a,c}},{{},{b,c}},{{},{a,b,c},{{b},{a,b,c}} dan {{c},{a,b,c}}. Akhirnya semua edge menghadap keatas dan semua panah dihapus. Hasilnya terlihat pada gambar 2.



Gambar 2

ELEMEN MAKSIMAL dan MINIMAL.

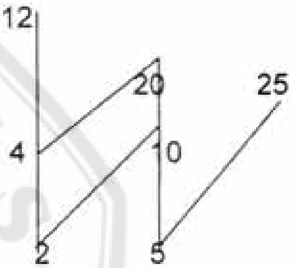
Elemen-elemen dari poset yang mempunyai sifat ekstrim tertentu sangat penting untuk beberapa aplikasi. Suatu elemen dari poset disebut maksimal jika ia tidak lebih kecil dari setiap elemen dari poset. Jadi a dikatakan maksimal dalam poset (S,$\leq$) jika tidak terdapat b$\in$ S sedemikian sehingga a < b.

Dengan cara yang sama suatu elemen a dikatakan minimal jika tidak terdapat b$\in$ S sedemikaian sehingga b <a.

Elemen maksimal dan minimal sangat mudah digunakan untuk menggambarkan diagram Hasse. Mereka disebut elemen "TOP(atas)" dan "BOTTOM(bawah)" dalam diagram.

Contoh:
Tentukan elemen maksimal dan minimal dari poset {{2,4,5,10,12,,20,25},/}.

Jawab:
Diagram Hasse pada gambar 3 untuk poset ini memperlihatkan bahwa elemen maksimal adalah 12,20 dan 25 dan elemen minimal adalah 2 dan 5. Suatu poset dapat memiliki lebih dari satu elemen maksimal dan lebih dari satu elemen minimal.



Gambar 3

TOPOLOGICAL SORTING

Sebelum membahas topological sorting,perlu diperkenalkan sebuah LEMMA,yaitu

LEMMA: setiap poset (S,$\leq$) hingga yang tidak kosong mempunyai elemen minimal.

BUKTI: Pilih suatu elemen a_0 dari S.Jika a_0 tidak minimal, maka terdapat elemen a_1 dengan $a_1 < a_0$. Jika a_1 tidak minimal, maka terdapat elemen a_2 dengan $a_2 < a_1$. Lanjutkan proses ini sedemikian sehingga jika a_n tidak minimal, maka terdapat suatu elemen a_{n+1} dengan $a_{n+1} < a_n$. Karena hanya terdapat elemen hingga dari elemen dalam poset, proses ini harus berhenti dengan suatu elemen minimal a_n .

Algoritma Topological sorting yang akan dibahas bekerja pada poset hingga yang tidak hampa. Untuk mendefinisikan suatu total order pada poset $(A,\leq)$, pertama kali pilih suatu elemen minimal a_1, elemen ini ada berdasarkan lemma di atas.

Selanjutnya perhatikan bahwa $(A-\{a_1\},\leq)$ juga suatu poset. Jika poset ini hampa, pilih suatu elemen minimal a_2 pada poset ini, kemudian hapus a_2, jika terdapat elemen yang masih ada pilih elemen minimal a_3 dalam $A-\{a_1,a_2\}$.

Lanjutkan proses ini dengan memilih a_{k+1} untuk dijadikan elemen minimal dalam $A-\{a_1,a_2,\ldots,a_j\}$ selama elemen masih ada.

Karena A himpunan hingga, maka proses ini pasti berhenti.Akhir dari produksi adalah suatu barisan elemen $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Total order yang diinginkan didefinisikan sebagai $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$

Total ordering ini compatible dengan partial order awal. Hal ini dapat dilihat sebagai berikut:

Perhatikan bahwa jika b c dalam partial order awal, c dipilih sebagai elemen minimal pada fase dari algoritma di mana b telah dihapus, karena sebaliknya jika tidak c bukan elemen minimal.

Pseudocode untuk algoritma topological sorting ini adalah sebagai berikut:

ALGORITMA TOPOLOGICAL SORTING:

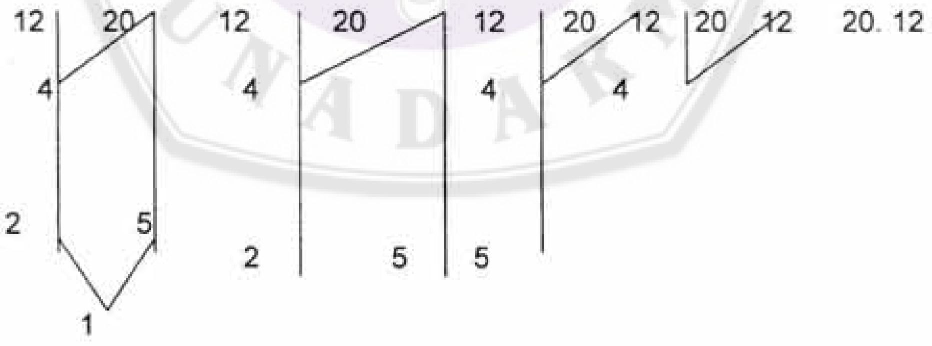
Procedure topological sort (S=poset hingga)
K:=1
While S $\neq\emptyset$
Begin
  a_k :=a elemen minimal dari S
  S:= S $-\{a_k\}$
  k:= k+1
end $\{a_1,a_2,\ldots,a_n$ adalah otal order yang compatible dari S)

CONTOH:

Tentukan total order yang compatible dari poset ({1,2,4,5,12,20},/)

Jawab: langkah pertama adalah memilih elemen minimal, dalam hal ini 1, karena hanya 1 elemen minimal selenjutnya pilih elemen minima lain dari ({2,4,5,12,20},/). Terdapat 2 elemen minimal yaitu 2 dan 5 dipilih 5, sisa elemen {2,4,12,20}. Elemen minimal pada himpunan ini adalah 2. Selanjutnya sisa elemen {4,12,20}, pilih elemen minimal yaitu 4. Sisa elemen {12,20}, dan kedunaya adalah minimal pilih salah satu misalnya 20 dan 12 dipilih sebagai elemen terakhir. Hal ini memberikan hasil 1 <5<2<4<20<12.

Langkah-langkah ini digambarkan sebagai berikut :



elemen minimal yang dipilih 1 5 2 4 20 12

ISSN 0216-4728

PENUTUP

Kesimpulan

Algoritma topological sorting dapat digunakan untuk melakukan penjadwalan dari suatu proyek, misalnya proyek pembangunan rumah atau perumahan dimana beberapa tugas dapat dimulai hanya bila tugas lain telah diselesaikan.

DAFTAR PUSTAKA

BARNETT ,RAYMOND A,finite mathematics,Dellen Publishing company,San fransisco

ROSEN,KENNETH H,Discrete Mathematics and its Applications,Mcgraw hill book,toronto,1999

Suryadi H S,Aljabar logika dan himpunan,Gunadarma

Suryadi H S,Teori Graf dasar,Gunadarma