

PERBANDINGAN METODE QUASI MONTE CARLO DENGAN BARISAN KUASI-ACAK HALTON DAN BARISAN KUASI-ACAK SOBOL DALAM OPTION PRICING

Stanislaus S. Uyanto

Universitas Katolik Atma Jaya Jakarta

E-mail: ss.uyanto@pa.atmajaya.ac.id

ABSTRACT

The Monte Carlo method has proved to be a valuable tool for estimating security prices for which closed form solutions do not exist. This paper evaluate the Quasi-Monte Carlo method that has attractive properties for the numerical valuation of derivatives and examines the use of Monte Carlo simulation with low-discrepancy sequences for valuing derivatives versus the traditional Monte Carlo method using pseudo-random sequences. The relative performance of the methods is evaluated based on European options.

Keywords: Monte Carlo, Quasi-Monte Carlo, European options.

PENDAHULUAN

Banyak persoalan komputasi keuangan moderen memerlukan perhitungan numerik yang mengandung integral multidimensi. Sebagai contoh, antara lain, *Asian options* dan *European Options*. Metode Monte Carlo merupakan alternatif yang sering digunakan untuk perhitungan numerik yang mengandung integral multidimensi tersebut. Penggunaan metode Monte Carlo dalam bidang komputasi keuangan dipelopori oleh Boyle (1977). Dalam tahun 1995, Paskov dan Traub (1995) mempublikasikan tulisan yang

menggunakan metode quasi-Monte Carlo. Hasil tulisan tersebut menunjukkan bahwa metode quasi-Monte Carlo memberikan pendekatan yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Monte Carlo. Sejak itu banyak tulisan lain dalam bidang komputasi keuangan yang menggunakan metode quasi-Monte Carlo sebagai alternatif yang menjanjikan, antara lain Joy dkk. (1996), Ninomiya and Tezuka (1996), Willard (1997), dan Tan dan Boyle (2000), juga Fang(2002) dan Ibáñez (2004).

Tulisan ini mencoba membandingkan penggunaan metode

quasi-Monte Carlo dalam menghitung *European options* dengan menggunakan barisan kuasi-acak Halton dan Sobol.

PEMBAHASAN

Metode Monte Carlo

Sebelum membahas mengenai metode quasi-Monte Carlo akan dibahas secara singkat metode Monte Carlo untuk menghitung integral multidimensi. Metode Monte Carlo berdasarkan fakta bahwa suatu bentuk integral, $\int_0^1 f(x) dx$, dapat dinyatakan sebagai nilai harapan

dari nilai fungsi dengan distribusi seragam pada $[0,1]$, yaitu

$$E[f(x)] = \int_{[0,1]} f(x) dx.$$

Hasil ini juga bisa diterapkan untuk menghitung bentuk integral multidimensi (1), di mana $C^d = [0,1]^d$ adalah

$$I(f) = \int_{C^d} f(x) dx \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \quad (1)$$

$$E[f(x)] = \int_{C^d} f(x) dx \quad (2)$$

$$E[f(x)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_{C^d} f(x) dx \quad (4)$$

Hal ini menunjukkan bahwa metode Monte Carlo memiliki orde galat $O(n^{-1/2})$ dengan konstanta yang merupakan ragam dari fungsi f yang diintegrasikan. Di sini terlihat bahwa galat metode Monte Carlo tidak tergantung dari dimensi- d .

Metode Quasi-Monte Carlo

Metode quasi-Monte Carlo tidak lain adalah metode Monte Carlo yang menggunakan **barisan kuasi-acak** sebagai pengganti dari **bilangan acak**

kubus satuan berdimensi- d , seperti dlm persamaan (2), Akibatnya bentuk integral tersebut bisa didekati dengan persamaan (3), di mana $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ diambil dari distribusi seragam pada $[0,1]^d$ yang terdistribusi independen

$$\varepsilon_n = \int_{C^d} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (5)$$

$$\varepsilon_n(f) \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi, \quad (6)$$

$$\sigma(f) = \left[\int_{C^d} \left(f(x) - \int_{C^d} f(x) dx \right)^2 dx \right]^{1/2} \quad (7)$$

dan identik. Berdasarkan *Strong Law of Large Numbers* didapat (4). Galat untuk metode Monte Carlo (5), di mana untuk nilai n yang besar (6), dengan $\xi \sim N(0,1)$ dan konstanta $\sigma = \sigma(f)$ adalah akar kuadrat dari ragam f (7).

semu. Barisan kuasi-acak ini digunakan untuk menghasilkan sampel yang representatif dari distribusi probabilitas yang disimulasikan dalam permasalahan praktis. Barisan kuasi-acak ini (sering disebut sebagai *low-discrepancy sequences*) memperbaiki kinerja dari simulasi Monte Carlo dan mempersingkat waktu komputasi serta memberikan akurasi yang lebih tinggi.

Metode quasi-Monte Carlo umumnya digunakan sebagai alternatif dari metode Monte Carlo dalam persoalan peng-

integralan numerik multidimensi (dalam bentuk Persamaan (1) di atas.

Metode quasi-Monte Carlo menggunakan barisan kuasi-acak q_n yang terdistribusi seragam untuk menghitung (8), (9), Pertidaksamaan Koksma-Hlawka (lihat Niederreiter(1992)) memberikan batas galat metode quasi-Monte Carlo (10),

$$E[f(x)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(q_n) \quad (8) \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(q_n) - \int_{c^d} f(\cdot) d \right| \leq V_{HK}(f) \cdot D_n^*(q_n) \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(q_n) \rightarrow \int_{c^d} f(\cdot) d \quad (9)$$

dimana $D_n^*(q_n)$ adalah kesenjangan dan $V_{HK}(f)$ adalah variasi (Hardy Krause). Kesenjangan adalah ukuran simpangan dari keseragaman suatu barisan titik dalam $D = [0,1]^d$. Kesenjangan menyebabkan terjadinya galat dalam metode quasi-Monte Carlo. Beberapa barisan kuasi acak menghasilkan kesenjangan $D_n^*(q_n)$ sebesar $O(n^{-1}(\log n)^d)$.

Barisan Kuasi Acak

Seperti dijelaskan di atas, bahwa metode quasi-Monte Carlo memerlukan barisan kuasi-acak yang bersifat seragam untuk memberikan hasil yang lebih akurat. Terdapat beberapa barisan kuasi-acak, antara lain van der Corput, Halton, Faure dan

Sobol. Dalam tulisan ini hanya akan dibahas dua barisan kuasi-acak yaitu Halton dan Sobol.

Barisan kuasi-acak Halton merupakan barisan berdimensi- d pada kubus satuan $[0,1]^d$. Dimensi pertama barisan kuasi acak Halton adalah barisan kuasi acak van der Corput basis 2 dan dimensi kedua barisan kuasi acak Halton merupakan barisan kuasi acak van der Corput basis 3. Secara umum barisan kuasi acak Halton berdimensi- d adalah barisan kuasi acak van der Corput yang didapat dengan menggunakan bilangan prima ke- d sebagai basis bilangan (Press dkk. (1992)).

Barisan kuasi acak Halton dapat dideskripsikan secara singkat sebagai berikut. Bila p_1, p_2, \dots, p_d merupakan d

bilangan prima pertama. Maka sembarang bilangan bulat $k \geq 0$ dapat secara unik dinyatakan

sebagai $k = \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 k \rfloor} a_j p_j^j$ dengan

bilangan bulat $a_j \in [0, p_j - 1]$.

fungsi kebalikan radikal ϕ_{p_j} didefinisikan sebagai

$\phi_{p_j}(k) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 k \rfloor} a_i p_j^{i-1}$. Barisan

kuasi acak Halton berdimensi- d adalah

$z_k = (\phi_{p_1}(k), \phi_{p_2}(k), \dots, \phi_{p_d}(k))$, k

Contoh barisan Halton dapat dilihat pada Tabel 1.

Barisan kuasi-acak Sobol (1967) merupakan barisan kuasi acak berdimensi- d yang berdasarkan bilangan prima 2 sebagai basis. Contoh barisan kuasi acak Sobol dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 1: Contoh Barisan kuasi-acak Halton

n	Dimensi = 1 (basis 2)	Dimensi = 2 (basis 3)	Dimensi = 3 (basis 5)
1	1/2	1/3	1/5
2	1/4	2/3	2/5
3	3/4	1/9	3/5
4	1/8	4/9	4/5
5	5/8	7/9	1/25
6	3/8	2/9	6/25
7	7/8	5/9	11/25
8	1/16	8/9	16/25

Tabel 2: Contoh Barisan kuasi-acak Sobol

n	Dimensi = 1 (Basis 2)	Dimensi = 2 (Basis 2)	Dimensi = 3 (Basis 2)
1	1/2	1/2	1/2
2	3/4	1/4	3/4
3	1/4	3/4	1/4
4	3/8	3/8	5/8
5	7/8	7/8	1/8
6	5/8	1/8	3/8
7	1/8	5/8	7/8
8	3/16	5/16	5/16

1. Simulasi *European Options* dengan *R language*

Model Black-Scholes

Black and Scholes (1973) menerbitkan sebuah artikel yang kemudian menjadi salah satu artikel yang sangat penting dalam teori keuangan. Merton

(1973) kemudian juga ikut mengembangkan model yang sekarang ini dikenal dengan nama Black-Scholes. Dari artikel tersebut dapat dilakukan perhitungan harga berbagai turunan termasuk *options*. Asumsi yang

mendasari model Black-Scholes adalah:

1. Harga saham mengikuti distribusi *lognormal*.
2. Tidak ada biaya transaksi atau pajak.

3. Tidak ada pembagian dividen selama masa hidup *options*.
4. Tidak ada peluang arbitrase yang tanpa risiko.
5. Perdagangan sekuritas bersifat kontinu.
6. Investor dapat meminjam dan meminjamkan pada tingkat suku bunga bebas risiko yang sama.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (11)$$

$$c = SN(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \quad (12)$$

$$p = Ke^{-rt} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (13)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (14)$$

$N(x)$ adalah fungsi distribusi normal kumulatif untuk d_1 dan d_2 . Nilai dari $N(x)$ dapat diperoleh dari tabel distribusi normal.

7. Suku bunga bebas risiko jangka pendek, r , konstan.

Dengan harga aset S , harga *strike* K , waktu jatuh tempo T , dan suku bunga bebas risiko r , maka model yang diasumsikan dapat mengendalikan perilaku S sebagai fungsi waktu t adalah (11). Dengan dz adalah suatu proses *Wiener*, μ adalah

ekspektasi pengembalian dan σ adalah volatilitas dari aset.

Variabel-variabel tersebut dapat diaplikasikan ke dalam suatu persamaan untuk menurunkan harga *European call options* dan *European put options* (12).

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (15)$$

$$= d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (16)$$

Persamaan pergerakan harga sekuritas diperoleh sebagai berikut (17). Sekuritas tersebut berevolusi berdasarkan pada sebuah persamaan tertentu. Solusi dari persamaan tersebut

adalah (19) dimana

$$(W_T - W_t) \sim N(0, T-t)$$

Solusi selanjutnya dapat ditulis ke dalam bentuk (20) dimana $X \sim N(0, \sigma^2(T-t))$.

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad (17) \quad S_t = S_0 \exp((r - 0.5\sigma^2)(T-t) + (\sigma(W_T - W_t))) \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mu(t, S_t) = \mu S_t \\ \sigma(t, S_t) = \sigma S_t \end{cases} \quad (18) \quad S_t = S_0 \exp((r - 0.5\sigma^2)(T-t) + X) \quad (20)$$

Jika sebuah $N(0,1)$ dapat dihasilkan, untuk mendapatkan nilai X hanya perlu mengalikan dengan $\sigma\sqrt{T-t}$. Untuk *European options*,

$T-t = T$ dikarenakan *European options* hanya bisa *exercise* pada saat jatuh tempo.

Hasil simulasi dengan bahasa *R* (www.r-project.org),

untuk *European call options*, nilai $S_0=469.94$, *strike*=470, $r = 0.20513$, $\sigma=0.2$, $T=0.5$ dan untuk *European put options*, nilai $S_0=84.83$, *strike*=85, $r =$

0.57437, $\sigma = 0.2, T=0.5$. Program dan hasil masing-masing metode dapat dilihat pada Gambar 1 sampai dengan Gambar 8.

```

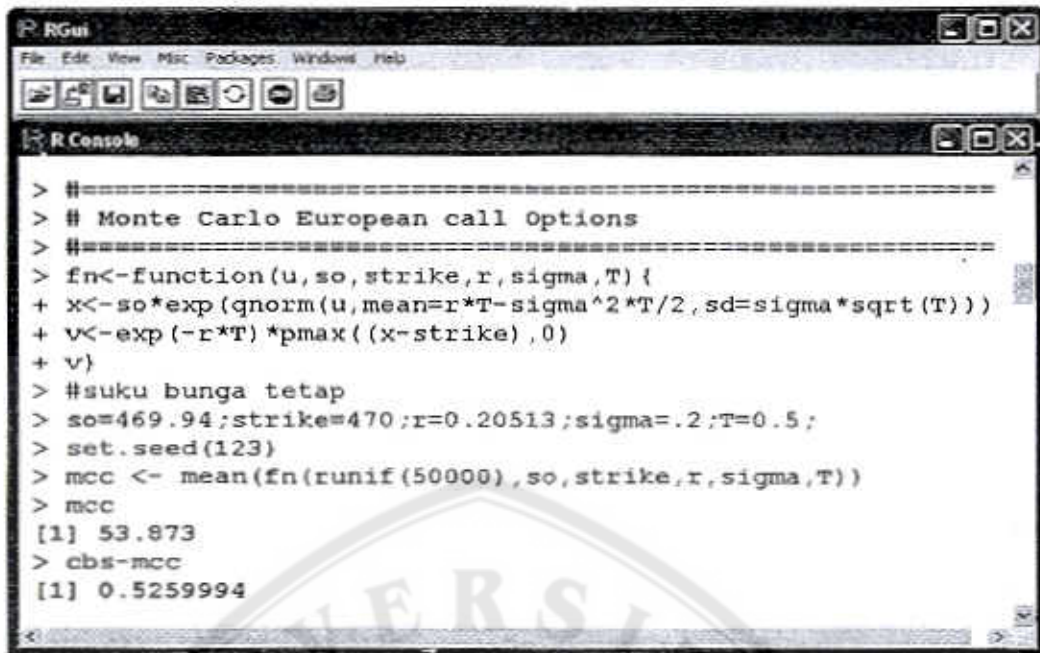
> # =====
> # European call options dengan Black-Scholes
> # =====
> #suku bunga tetap
> bs<-function(so,strike,r,sigma,T){
+ d1<-(log(so/strike)+r*T)/(sigma*sqrt(T))+0.5*sigma*sqrt(T)
+ d2<-d1-(sigma*sqrt(T))
+ bsc<-so*CND(d1)-strike*exp(-r*T)*CND(d2)
+ }
> so=469.94;strike=470;r=0.20513;sigma=.2;T=0.5;
> mean(bs(so,strike,r,sigma,T))
[1] 54.399
> #-----
> █
    
```

Gambar 1. Program R dan hasilnya *European Call Options* dengan *Black-Scholes*

```

> # =====
> # European put options dengan Black-Scholes
> # =====
> #suku bunga tetap
> bs<-function(so,strike,r,sigma,T){
+ d1<-(log(so/strike)+r*T)/(sigma*sqrt(T))+0.5*sigma*sqrt(T)
+ d2<-d1-(sigma*sqrt(T))
+ bsp<-strike*exp(-r*T)*CND(-d2)-so*CND(-d1)
+ }
> so=84.83;strike=85;r=0.57437;sigma=.2;T=0.5;
> mean(bs(so,strike,r,sigma,T))
[1] 0.08431907
> #-----
> █
    
```

Gambar 2. Program dan Hasil perhitungan dengan *R* untuk *European put options* dengan *Black-Scholes*.

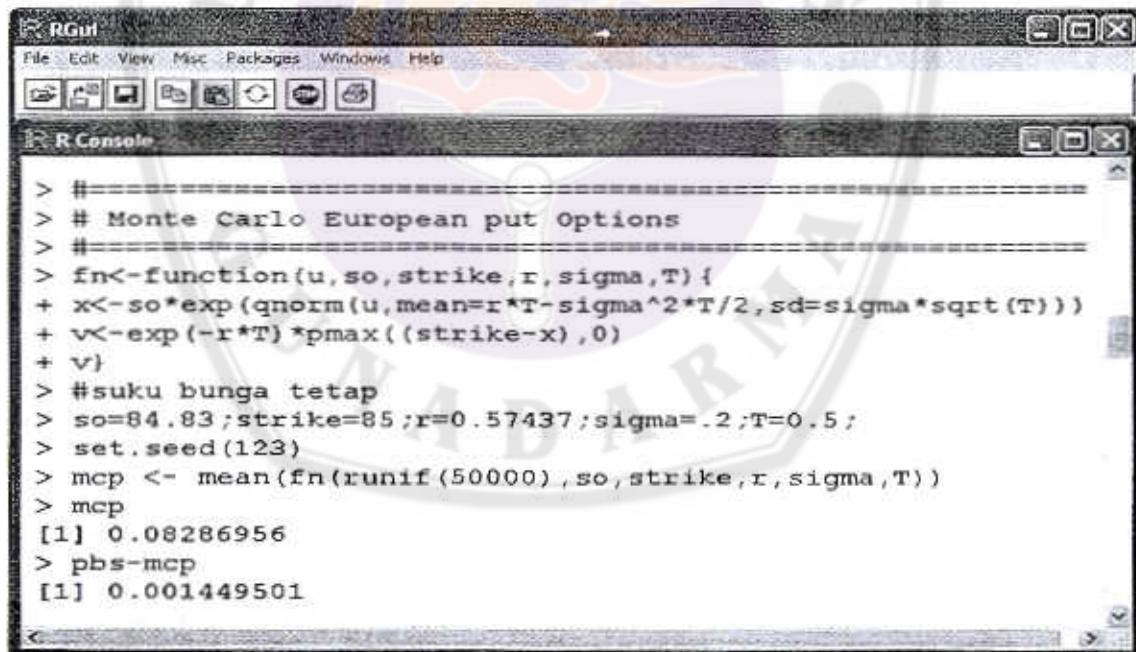


```

RGui
File Edit View Misc Packages Windows Help
R Console
> #=====
> # Monte Carlo European call Options
> #=====
> fn<-function(u, so, strike, r, sigma, T) {
+ x<-so*exp(qnorm(u, mean=r*T-sigma^2*T/2, sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((x-strike), 0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=469.94;strike=470;r=0.20513;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> mcc <- mean(fn(runif(50000), so, strike, r, sigma, T))
> mcc
[1] 53.873
> cbs-mcc
[1] 0.5259994

```

Gambar 3. Program dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European call options* dengan Black-Scholes menggunakan metode Monte Carlo



```

RGui
File Edit View Misc Packages Windows Help
R Console
> #=====
> # Monte Carlo European put Options
> #=====
> fn<-function(u, so, strike, r, sigma, T) {
+ x<-so*exp(qnorm(u, mean=r*T-sigma^2*T/2, sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((strike-x), 0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=84.83;strike=85;r=0.57437;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> mcp <- mean(fn(runif(50000), so, strike, r, sigma, T))
> mcp
[1] 0.08286956
> pbs-mcp
[1] 0.001449501

```

Gambar 4. Program dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European put options* dengan Black-Scholes menggunakan metode Monte Carlo

```

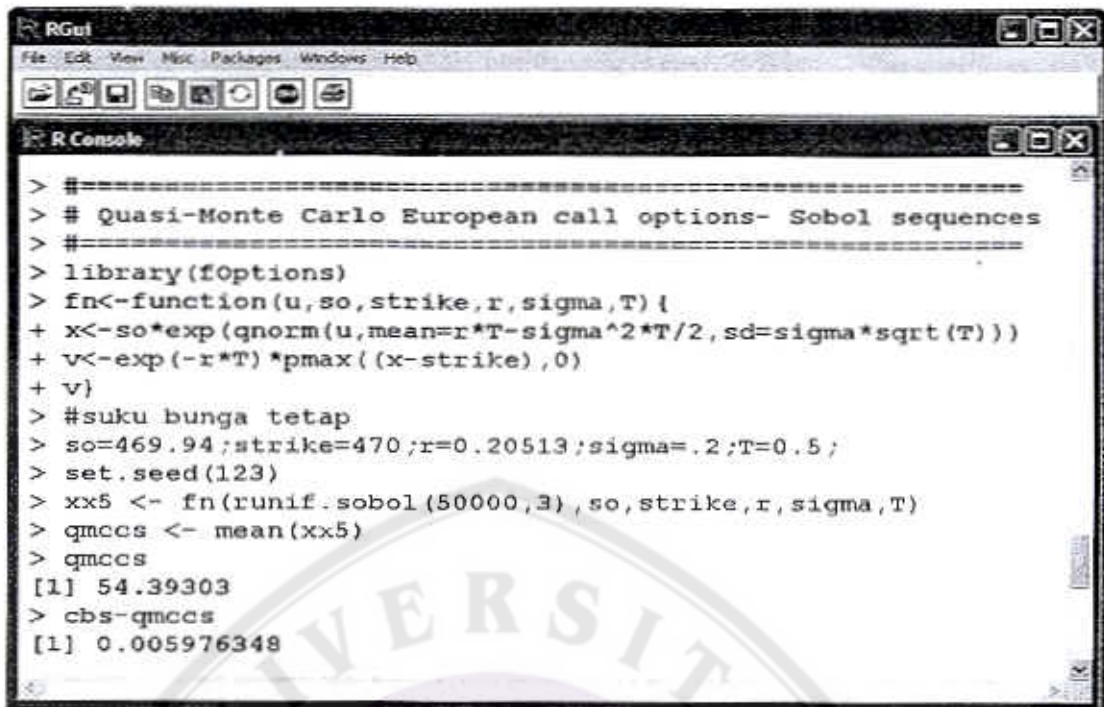
> #=====
> # Quasi-Monte Carlo European call options- Halton sequences
> #=====
> library(fOptions)
> fn<-function(u, so, strike, r, sigma, T) {
+ x<-so*exp(qnorm(u, mean=r*T-sigma^2*T/2, sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((x-strike), 0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=469.94;strike=470;r=0.20513;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> xx3 <- fn(runif.halton(50000,3), so, strike, r, sigma, T)
> qmcch <- mean(xx3)
> qmcch
[1] 54.38418
> cbs=qmcch
[1] 0.01482157
    
```

Gambar 5. Program dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European call options* dengan Black-Scholes menggunakan Quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Halton

```

> #=====
> # Quasi-Monte Carlo European put options- Halton sequences
> #=====
> library(fOptions)
> fn<-function(u, so, strike, r, sigma, T) {
+ x<-so*exp(qnorm(u, mean=r*T-sigma^2*T/2, sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((strike-x), 0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=84.83;strike=85;x=0.57437;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> xx4 <- fn(runif.halton(50000,3), so, strike, r, sigma, T)
> qmcph <- mean(xx4)
> qmcph
[1] 0.08459234
> pbs=qmcph
[1] -0.0002732775
    
```

Gambar 6. Program dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European put options* dengan Black-Scholes menggunakan Quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Halton

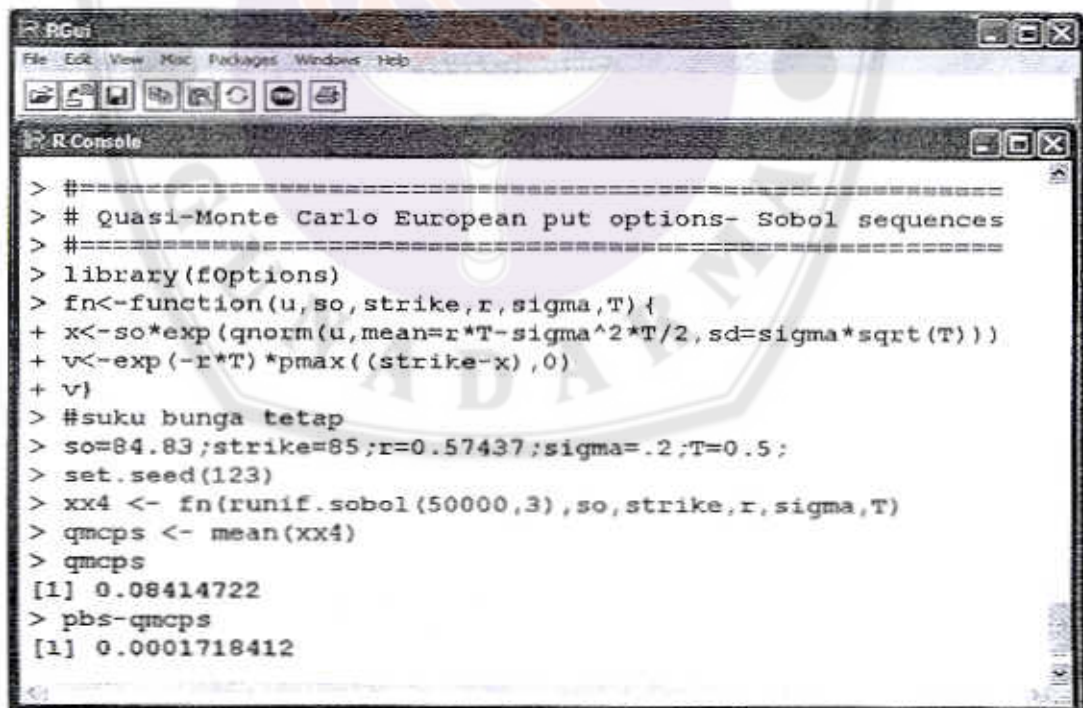


```

RGui
File Edit View Misc Packages Windows Help
R Console
> #=====
> # Quasi-Monte Carlo European call options- Sobol sequences
> #=====
> library(foptions)
> fn<-function(u,so,strike,r,sigma,T){
+ x<-so*exp(qnorm(u,mean=r*T-sigma^2*T/2,sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((x-strike),0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=469.94;strike=470;r=0.20513;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> xx5 <- fn(runif.sobol(50000,3),so,strike,r,sigma,T)
> qmccs <- mean(xx5)
> qmccs
[1] 54.39303
> cbs-qmccs
[1] 0.005976348

```

Gambar 7 Program dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European call options* dengan Black-Scholes menggunakan Quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Sobol



```

RGui
File Edit View Misc Packages Windows Help
R Console
> #=====
> # Quasi-Monte Carlo European put options- Sobol sequences
> #=====
> library(foptions)
> fn<-function(u,so,strike,r,sigma,T){
+ x<-so*exp(qnorm(u,mean=r*T-sigma^2*T/2,sd=sigma*sqrt(T)))
+ v<-exp(-r*T)*pmax((strike-x),0)
+ v}
> #suku bunga tetap
> so=84.83;strike=85;r=0.57437;sigma=.2;T=0.5;
> set.seed(123)
> xx4 <- fn(runif.sobol(50000,3),so,strike,r,sigma,T)
> qmcpes <- mean(xx4)
> qmcpes
[1] 0.08414722
> pbs-qmcpes
[1] 0.0001718412

```

Gambar 8. Perhitungan dan Hasil perhitungan dengan R untuk *European put options* dengan Black-Scholes menggunakan Quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Sobol

Hasil Simulasi *European Options* atas dirangkum dalam satu tabel, seperti yang dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3: Hasil Perbandingan *European Call Options* ($n=50\ 000$)

Metode	<i>European Call Options</i>	Residual
Black Scholes	54.399	--
Monte Carlo	53.873	0.5259994
Quasi-Monte Carlo - Halton	54.38418	0.01482157
Quasi-Monte Carlo - Sobol	54.39303	0.005976348

Tabel 4: Hasil Perbandingan *European Put Options* ($n=50\ 000$)

Metode	<i>European Put Options</i>	Residual
Black Scholes	0.08431907	--
Monte Carlo	0.08286956	0.001449501
Quasi-Monte Carlo - Halton	0.08459234	-
Quasi-Monte Carlo - Sobol	0.08414722	0.0001718412

Dari Tabel 3 dan Tabel 4 terlihat bahwa hasil simulasi *European Options* dengan metode quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Sobol memberikan hasil terbaik, hal ini terlihat dari residual yang sangat kecil bila dibandingkan dengan metode Monte Carlo dan quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Halton.

Sobol memberikan hasil terbaik, hal ini terlihat dari residual untuk *European Call Options* dan *European Put Options* yang selalu jauh lebih kecil dibandingkan dengan metode Monte Carlo dan quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi acak Halton.

- Penggunaan barisan kuasi acak yang bersifat lebih seragam pada metode *Quasi-Monte Carlo* dibandingkan dengan

bilangan acak semu pada Monte Carlo menunjukkan bahwa barisan kuasi-acak lebih representatif pada $[0,1]^d$.

- Masih terbuka peluang untuk melakukan riset terhadap barisan kuasi acak yang dapat digunakan dalam aplikasi komputasi integral yang bersifat lebih acak dan seragam

PENUTUP

- Metode Quasi-Monte Carlo dengan barisan kuasi-acak

DAFTAR PUSTAKA

- Black, F. and Scholes, M. 1973. **The pricing of options and corporate liabilities.** *Journal of Political Economy*, 81: 637-659.
- Boyle, P., 1977. **'Options: a Monte Carlo approach'**, *Journal of Financial Economics*, 4:323-338.
- Fang, K.T., Hickernell, F.J., and Niederreiter, H. (Editors), 2002, **Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2000**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- H. Niederreiter, 1992, **'Random Number and Quasi-Monte Carlo Methods'**, SIAM, Philadelphia,
- Ibáñez, A., 2004, **'Valuation by Simulation of Contingent Claims with Multiple Early Exercises Opportunities'**, *Mathematical Finance*, 4(2): 223-248.
- Joy, S., Boyle, P.P., and Tan, K.S. 1996, **'Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance'**, *Management Science*, 42:926-938.
- Merton, R.C. 1973. **Theory of rational option pricing.** *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4: 141-183.
- Ninomiya, S. and Tezuka, S., 1996, **'Toward real-time pricing of complex financial derivatives'**, *Applied Mathematical Finance*, 3:1-20.
- Paskov, S. and Traub, J., 1995. **'Faster valuation of financial derivatives'**, *Journal of Portfolio Management*, 22:113-120.
- Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A.; and Vetterling, W. T., 1992, **Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing**, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Sobol, I.M., 1967, **'On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of Integrals'**. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematics Physics*, 7:86-112.
- Tan, K.S., and Boyle, P.P. 2000, **'Applications of randomized low discrepancy sequences to the valuation of complex securities'** *Journal of Economic Dynamics and Control* 24:1747-1782.
- Venables, W. N. and Smith, D. M. 2006. **An Introduction to R**. R Development Core Team, <http://cran.r-project.org/manuals.html>
- Willard, G.A., 1997, **'Calculating Price and sensitivities for path-dependent derivatives securities in multifactor models'**, *Journal of Derivatives*, 5:45-61.