

PENGARUH STRATEGI PULSE VACCINATION TERHADAP PENCEGAHAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK

ABSTRAK

Campak adalah penyakit menular dan sangat berbahaya. Oleh karena itu, perlu dilakukan upaya untuk mencegah penyebarannya. Salah satu cara yang efektif untuk mengatasi penyebaran penyakit ini adalah vaksinasi. Ada dua strategi vaksinasi, yaitu *constant vaccination* dan *pulse vaccination*. Penelitian ini membahas pengaruh strategi *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak dengan menggunakan model epidemik SIR (Susceptible, Infectious, Recovered). Berdasarkan pembentukan model tersebut, diperoleh suatu nilai ambang batas epidemik yang digunakan sebagai batasan untuk analisis selanjutnya. Analisa sistem dinamik pada model dengan menentukan solusi periodik bebas infeksi menggunakan pemetaan stroboskopik dan titik tetap. Selanjutnya digunakan metode linierisasi dan teori Floquet untuk menentukan kestabilan dari solusi tersebut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kestabilan solusi periodik bebas infeksi bergantung pada pengambilan nilai dari periode *pulse vaccination* (T). Berdasarkan kriteria kestabilan tersebut diperoleh bahwa strategi *pulse vaccination* akan berhasil mencegah terjadinya penyebaran penyakit campak jika nilai dari $T < T_{max}$. Untuk mendukung pembahasan teori di dalam penelitian ini, dilakukan simulasi dengan menggunakan software Matlab.

Kata Kunci: Pulse Vaccination, Model Epidemik SIR, Solusi Periodik Bebas Infeksi, Pemetaan Stroboskopik, Teori Floquet.

Dewi Putrie Lestari¹
Hengki Tasman²

¹Pusat Studi Komputasi Matematika
Universitas Gunadarma,
dewi_putrie@staff.gunadarma.ac.id
²Departemen Matematika Universitas Indonesia,
htasman@ui.ac.id

PENDAHULUAN

Campak adalah penyakit infeksi pada saluran pernapasan yang disebabkan oleh virus *rubeola*. Penyakit ini juga sering disebut penyakit *rubeola*. Penyakit campak biasanya menyerang balita dan anak-anak. Gejala penyakit ini antara lain demam, batuk, pilek, radang pada saluran pernafasan, nyeri otot, mata merah dan berair, serta timbul bercak-bercak merah pada kulit.

Campak sangat mudah menular, sehingga penyakit ini potensial untuk menimbulkan terjadinya wabah. Penularan penyakit ini terjadi secara langsung dari individu yang satu ke individu yang lain melalui cairan yang berasal dari mata, hidung, dan tenggorokan yang menyebar melalui udara pada waktu batuk, bersin, atau pada saat berbicara. Setiap orang yang telah terkena penyakit campak akan memiliki imunitas atau kekebalan terhadap penyakit ini seumur hidup (Scheined-Schaullies, S., 1999).

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit yang berbahaya karena dapat menimbulkan komplikasi, kerusakan otak dan organ lain, cacat seumur hidup, kelumpuhan, serta kematian. Bahkan penyakit ini merupakan salah satu penyebab utama kematian anak-anak di dunia.

Menurut *United Nations Children's Fund* (UNICEF) (2007), sekitar 30.000 anak di Indonesia meninggal dunia setiap tahun karena penyakit campak. Menurut *World Health Organization* (WHO) (2007), terdapat sekitar 242.000 anak di seluruh dunia meninggal dunia pada tahun 2006 karena penyakit campak.

Besarnya angka kematian dan kelumpuhan karena penyakit ini menunjukkan bahwa campak merupakan penyakit yang sangat berbahaya, sehingga

sangat perlu dilakukan upaya untuk mencegah penyebarannya.

Salah satu cara yang efektif untuk mencegah penyebaran penyakit ini adalah dengan melakukan program vaksinasi. Strategi vaksinasi dibedakan menjadi dua, yaitu *constant vaccination* dan *pulse vaccination*.

Strategi *constant vaccination* adalah cara pemberian vaksin yang dilakukan setiap saat kepada semua bayi yang baru lahir. Sedangkan strategi *pulse vaccination* adalah cara pemberian vaksin yang dilakukan secara berkala dalam periode waktu tertentu kepada sebagian proporsi populasi.

Strategi *constant vaccination* bisa berhasil mencegah terjadinya epidemi suatu penyakit, jika proporsi dari individu-individu yang divaksinasi lebih besar dari suatu nilai batasan tertentu.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z. (1998) didapatkan bahwa *constant vaccination* akan berhasil mencegah terjadinya epidemik campak, jika vaksin campak diberikan kepada setidaknya 95% dari semua anak yang baru lahir dalam suatu populasi.

Berdasarkan nilai batasan tersebut, jika populasi berukuran cukup besar maka penerapan strategi ini sangat sulit serta membutuhkan biaya yang mahal.

Tabel 1
Parameter Model Epidemik SIR

Simbol	Keterangan	Syarat
S	Ukuran populasi susceptible	$S > 0$
I	Ukuran populasi infectious	$I > 0$
R	Ukuran populasi recovered	$R > 0$
N	Ukuran total populasi	$N = S + I + R$
μ	Laju kelahiran alami per kapita = laju kematian alami perkapita	$\mu \geq 0$
β	Laju penularan alami per kapita	$\beta > 0$
γ	Laju kesembuhan alami per kapita	$\gamma > 0$
T	Periode pulse vaccination	$T > 0$
p	Proporsi individu yang divaksin	$0 < p < 1$
t^n	Waktu saat terjadi vaksinasi ke-n	$t^n = nT$
$t_{\bar{n}}$	Waktu sesaat sebelum terjadi vaksinasi ke-n	$t_{\bar{n}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t^n - \epsilon)$

Pada strategi *pulse vaccination*, vaksin diberikan hanya kepada sebagian proporsi populasi yang dilakukan secara berkala setiap T tahun, sehingga dengan *pulse vaccination* diharapkan epidemik suatu penyakit dapat lebih efisien dikontrol. Selain itu, strategi *pulse vaccination* juga menggunakan vaksin yang lebih sedikit dibandingkan dengan *constant vaccination* (Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z., 1998).

Pada penjelasan sebelumnya terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* memiliki beberapa kelebihan dibandingkan dengan strategi *constant vaccination*. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dibahas pengaruh strategi *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak dengan menggunakan model epidemik SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*).

METODE PENELITIAN

Konstruksi Model Epidemik SIR

Parameter yang digunakan dalam model epidemik SIR penyakit campak dapat dilihat pada Tabel 1.

Model epidemik SIR dengan mempertimbangkan pengaruh strategi *pulse vaccination* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{di}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \end{aligned}$$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} S(t_n) &= S(t_{n-}) - pS(t_{n-}) \\ I(t_n) &= I(t_{n-}) \\ R(t_n) &= R(t_{n-}) + pS(t_{n-}) \end{aligned}$$

Model (3.1) dinormalisasi sehingga

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \mu i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \mu r \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} S(t_n) &= S(t_{n-}) - pS(t_{n-}) \\ i(t_n) &= i(t_{n-}) \\ r(t_n) &= r(t_{n-}) - pS(t_{n-}) \end{aligned}$$

Selanjutnya karena $r = 1 - (s + i)$, maka untuk analisis model (3.2) cukup diperhatikan sistem dimensi dua, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \mu i \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} S(t_n) &= S(t_{n-}) - pS(t_{n-}) \\ i(t_n) &= i(t_{n-}) \end{aligned} \quad t_{n+1} = t_n + T$$

Nilai Ambang Batas Epidemik

Nilai ambang batas epidemik (epidemic threshold) adalah suatu nilai ukuran yang menyatakan terjadinya suatu penyebaran penyakit atau tidak. Dari model (3.3) jika

$$\frac{di}{dt} < 0 \quad \text{diperoleh} \quad s(t) < \frac{\mu + \gamma}{\beta}$$

sehingga nilai ambang batas epidemik untuk model ini adalah

$$s_c = \frac{\mu + \gamma}{\beta}$$

Solusi Periodik bebas Infeksi

Sistem (3.3) akan setimbang ketika

$$i(\beta s - \mu - \gamma) = 0 \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.4) diperoleh nilai: $i = 0$. Selanjutnya dengan mensubstitusi $i(t) = 0$ ke pada sistem (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \mu s \quad \text{dan} \quad s(t_n) = \\ &= (1 - p) s(t_{n-}), \quad t_{n+1} = t_n + T \end{aligned}$$

Berdasarkan dua persamaan di atas diperoleh solusi untuk variabel $s(t)$ adalah

$$\begin{aligned} s(t) &= 1 + (s(t_n) - 1) e^{-\mu(t - t_n)} \\ & \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \\ s(t) &= (1-p)Q(t) \quad t = t_{n+1} \end{aligned}$$

dengan $Q(t) = 1 + (s(t_n) - 1)e^{-\mu(t - t_n)}$

Pemetaan stroboskopik F yang digunakan untuk persamaan (3.5) yaitu

$F(s_n) = s_{n+1}$, dengan $s_n = s(t_n)$ dan $s_{n+1} = S(t_{n+1})$. Dari persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) diperoleh:

$F(s_n) = (1 - p)(1 + (s_n - 1)e^{-\mu T})$ Titik tetap untuk pemetaan stroboskopik F diatas adalah

$$s = \frac{(1-p)(e^{\mu T} - 1)}{p - 1 + e^{\mu T}}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $s_n = s$ ke sistem (3.5) diperoleh solusi periodik bebas infeksi untuk interval $t_n < t < t_{n+1} = t_n + T$ adalah $(s(t), i(t))$ dengan

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1 - e^{\mu T}} e^{-\mu T(t - t_n)} \\ & \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \\ \bar{s}(t) &= s, \quad t = t_{n+1}, \\ \bar{i}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Kestabilan solusi Periodik Bebas Infeksi

Persamaan (3.3) diperluas menggunakan ekspansi Taylor dengan metode linierisasi, dan dengan menggunakan pemisalan $s(t) = s(t) + x(t)$ dan $i(t) = y(t)$, diperoleh bentuk persamaan linier untuk model (3.3) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\mu x - \beta \bar{s}(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= -y(\beta s(t) - \mu - \gamma) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kestabilan dari sistem linier tersebut ditentukan dengan menggunakan teori Floquet. Matriks fundamental $X(t)$ dari sistem (3.8) yaitu

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & x_2(t) \\ 0 & e^{\int_0^t (\beta s(t) - (\mu + \gamma)) dt} \end{pmatrix}$$

yaitu $X^{-1}(0) = I$ maka diperoleh matriks monodromi $X(T)$

$$X(T) = \begin{pmatrix} e^{-\mu T} & x_2(T) \\ 0 & e^{\int_0^T (\beta s(t) - (\mu + \gamma)) dt} \end{pmatrix}$$

dan dua penggali Floquet yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-\mu T} \\ \lambda_2 &= e^{\int_0^T (\beta s(t) - (\mu + \gamma)) dt} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Kestabilan dari solusi (3.7) hanya bergantung pada apakah $|\lambda_2| < 1$ sehingga berdasarkan peridaksamaan (3.9) diperoleh

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt < \frac{\mu + \gamma}{\beta} = s_c \quad (3.10)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai dari $s(t)$ pada persamaan (3.7) ke pertidaksamaan (3.10) serta mengintegrasikannya diperoleh

$$\frac{(\mu T - p)(e^{\mu T} - 1) + \mu p T}{\mu T(p - 1 + e^{\mu T})} < \frac{\mu + \gamma}{\beta}$$

Nilai Periode Pulse Vaccination

Strategi *pulse vaccination* bisa mencegah terjadinya epidemik penyakit campak jika nilai dari $T < T_{\max}$ berdasarkan persamaan (3.5) dan persamaan (3.7) diperoleh bahwa proporsi maksimum dari *susceptible* sesaat sebelum terjadi *pulse vaccination* adalah $Q(t)$ dengan

$$Q(t) = \frac{s^*}{1 - p}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai dari T_{\max} kita perlu menetapkan bahwa

$$\frac{s^*}{1 - p} < s_c \quad (3.11)$$

Dengan mensubstitusikan nilai dari S^* dan S_c pada pertidaksamaan (3.11) maka diperoleh nilai dari T_{\max} yaitu

$$T_{\max} \approx \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{p s_c}{1 - s_c} \right)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk melihat pengaruh dari nilai terhadap keberhasilan dari strategi *pulse vaccination*, dilakukan simulasi dengan pengambilan nilai yang berbeda beda.

Tabel 2
Nilai Parameter Simulasi

Parameter	Nilai Parameter
$s(0)$	0,0556
$i(0)$	0,05
μ	0,02/tahun
β	1800/tahun
γ	100/tahun
p	0,515

Sumber: nilai parameter μ, β, γ, p , dan diperoleh dari (Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z., 1998)

Model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* pada model (3.3) dengan nilai parameter pada Tabel 2 bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = 0,02 - 1800si - 0,02s$$

$$\frac{di}{dt} = 1800si - 100i - 0,02i$$

$$\frac{dr}{dt} = 100i - 0,02r$$

$$s(t_n) = s(t_{n-1}) - 0,5 s(t_{n-1})$$

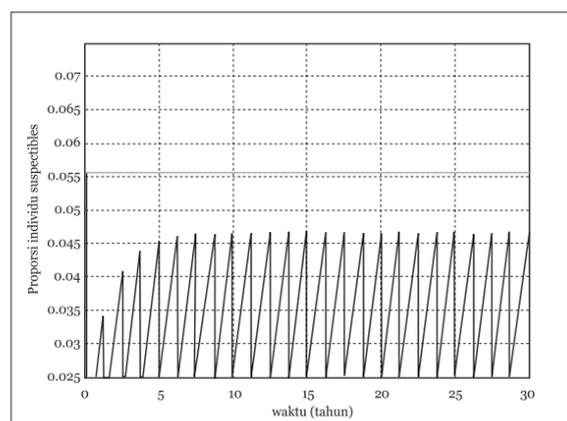
$$i(t_n) = i(t_{n-1})$$

$$r(t_n) = r(t_{n-1}) - 0,5 s(t_{n-1})$$

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh $T_{max} \square = 1,49 \approx 1,5$ tahun

Simulasi untuk tahun

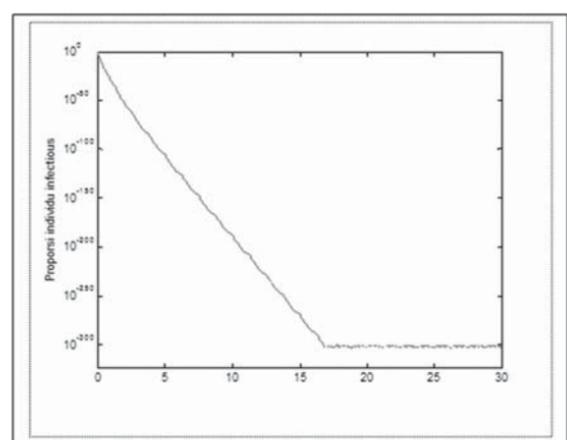
Dengan menggunakan *software* Matlab diperoleh *output* sebagai berikut. Untuk individu *susceptible* diperoleh



Keterangan : — = *epidemic threshold*
— = *pergerakan*

Gambar 1. Proporsi individu *susceptible* dengan nilai tahun

Hasil *output* pada Gambar 1 menunjukkan bahwa proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi maupun pada saat tidak terjadi vaksinasi nilainya berada jauh di bawah nilai ambang batas epidemik. Untuk individu *infectious* diperoleh



Gambar 2. Proporsi individu *infectious*

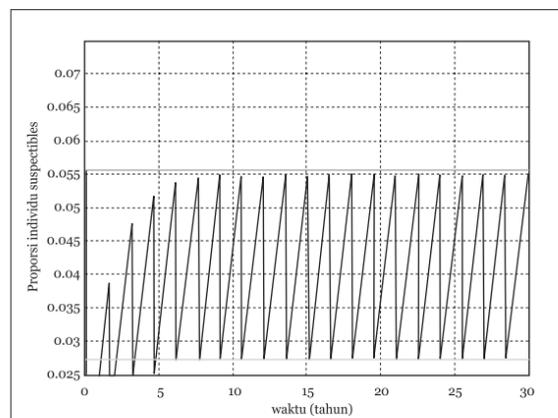
Berdasarkan *output* pada Gambar 2 terlihat bahwa proporsi individu *infectious* lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi nilai proporsi individu yang terinfeksi.

Berdasarkan *output* pada Gambar 1 dan Gambar 2 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 1.25 tahun yang berarti nilai $T < T_{max} \square$ sangat berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak.

Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi maupun pada saat tidak dilakukan vaksinasi berada jauh di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan untuk proporsi individu *infectious* seiring dengan berjalannya waktu nilainya semakin kecil.

Simulasi untuk T = 1,5 tahun

Untuk individu *susceptible* diperoleh

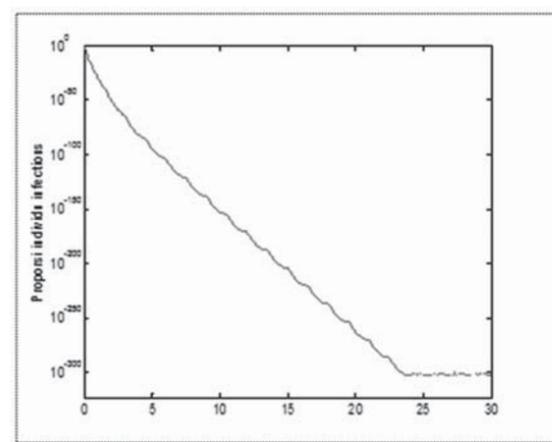


Keterangan : — = *epidemic threshold*
— = *pergerakan*
— = *titik tetap*

Gambar 3. Proporsi individu *susceptible* dengan nilai tahun

Hasil *output* pada Gambar 3 menunjukkan bahwa proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi, nilainya berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c dan lama kelamaan mulai $t=10$ nilainya mendekati titik tetap s^* atau dapat dikatakan nilai dari konvergen ke titik tetap. Sedangkan pada saat tidak terjadi vaksinasi, lama kelamaan seiring berjalannya waktu nilai proporsi populasi *susceptible* mendekati nilai ambang batas epidemik tetapi nilainya tidak melebihi nilai ambang batas epidemik tersebut.

Untuk individu *infectious* diperoleh



Gambar 4. Proporsi individu *infectious*

Berdasarkan *output* pada Gambar 4 terlihat bahwa proporsi individu *infectious* lama kelamaan nilainya semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi nilai proporsi individu yang terinfeksi.

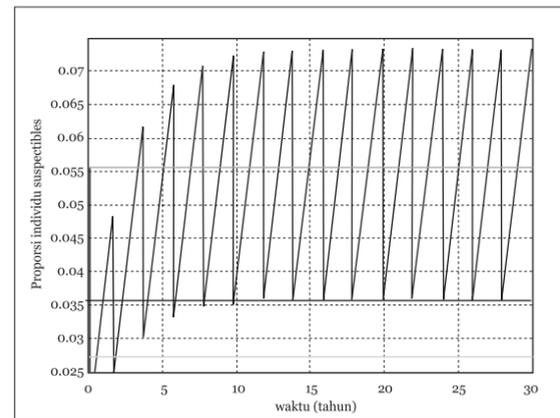
Berdasarkan *output* pada Gambar 3 dan Gambar 4 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 1.5 tahun yang berarti nilai $T < T_{max} \square$ dan T nilai sama dengan hasil aproksimasi

dari nilai $T_{max} \square$, yaitu $T_{max} \square = 1,49 \approx 1,5$ berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak.

Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi nilainya tidak melebihi nilai ambang batas epidemik s_c . Selain itu, untuk proporsi individu *infectious* seiring dengan berjalannya waktu nilainya semakin kecil.

Simulasi untuk T=2 tahun

Untuk individu *susceptible* diperoleh



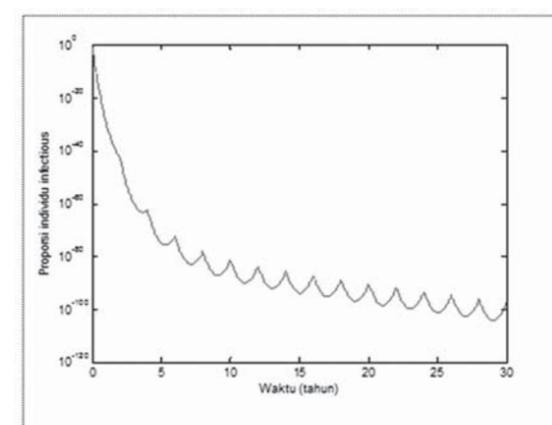
Keterangan : — = *epidemic threshold*
— = *pergerakan s(t)*
— = *titik tetap s**

Gambar 5. Proporsi individu *susceptible* dengan nilai T=2 tahun.

Hasil *output* pada Gambar 5 menunjukkan bahwa nilai proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c dan lama kelamaan mulai $t=10$ nilainya mendekati titik tetap atau dapat dikatakan nilai dari konvergen ke titik tetap.

Sedangkan pada saat tidak terjadi vaksinasi, lama kelamaan seiring berjalannya waktu nilai proporsi populasi *susceptible* lebih besar dari nilai ambang batas epidemik atau dapat dikatakan nilainya melebihi nilai ambang batas epidemik tersebut.

Untuk individu *infectious* diperoleh



Gambar 6. Proporsi individu *infectious*

Berdasarkan *output* pada Gambar 6 terlihat bahwa jumlah individu *infectious* lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi jumlah individu yang terinfeksi.

Berdasarkan *output* pada Gambar 5

dan Gambar 6 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 2 tahun yang berarti nilai $T > T_{max}$ berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak hanya pada saat dilakukan vaksinasi dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi terjadi epidemik penyebaran campak.

Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi nilainya melebihi nilai ambang batas epidemik s_c .

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan dengan pengambilan nilai yang berbeda beda, diperoleh bahwa strategi *pulse vaccination* berhasil dalam hal pencegahan terjadinya penyebaran penyakit campak asalkan nilai $T < T_{max}$ dengan nilai

$$T_{max} \approx \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{ps_c}{1 - s_c} \right)$$

Untuk analisa model epidemik SIR bisa juga dilakukan dengan menentukan solusi periodik epidemik. penulis memberikan saran kepada para pembaca yang tertarik untuk mengembangkan pembahasan di penelitian ini dengan menentukan solusi periodik epidemik, serta menentukan kestabilan global dari solusi periodik bebas infeksi maupun solusi periodik epidemik.

DAFTAR PUSTAKA

Agur, Z., Cojocaru, L., Major, G., Anderson, R.M., & Danon, Y. (1993). Pulse mass measles vaccination across age cohorts. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 90, 11698-11702.

Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vektor fields*. New York: Springer-Verlag.

Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z. (1998). Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bull. Math. Biol*, 60, 6, 1123-1148.

Stone, L., Shulgin, B., & Agur, Z. (2000). Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Mathematic and Computer Modelling*, 31, 207-215.

UNICEF. (2007). Going the extra mile. *Unicef Indonesia Immunization Drive Reaches Remote Areas*. http://www.unicef.org/indonesia/r_eallives_7295.html.

WHO. (2007). Measles. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/>

