’ERBANDINGAN TRANSFORMASI DERET FOURIER DAN TRANSFORMASI (INTEGRAL) FOURIER

Ravi Ahmad Salim[1]
Ernastuti[2]
Fakultas Ilmu Komputer dan Teknologi Informasi Universitas Gunadarma
Jl. Margonda Raya No. 100 Depok 16424
[1,2]{ravi, ernas}@staff.gunadarma.ac.id

ABSTRAK

Tujuan dari tulisan ini adalah untuk menjelajahi transformasi yang terbentuk dari Deret fourier alih-alih dari integral Fourier. Sifat yang diselidiki di sini ditelusuri menurut jalan cerita dari transformasi Fourier, misalnya transformasi turunan dan integral, konvolusi, serta turunan dan integral dari hasil transformasi. Juga dibicarakan deret Fourier kompleks yang melahirkan transformasi yang merupakan versi spektrum diskret dari transformasi Fourier kompleks. Setelah itu perolehannya akan dibandingkan sehingga analogi masing-masing akan semakin jelas.

Kata Kunci: Transformasi Deret fourier, Transformasi Integral Fourier. Fourier Kompleks.

eret Fourier Nyata dan Transformasinya

efinisi dan Sifat

embicaraan tentang deret Fourier berangkat ıri teorema di bawah ini yang dikemukakan eh G.L.Dirichlet.

eorema A.1. Rumus deret Fourier dari ıngsi Berperiode 2L. (Lipschitz, 1974).

. Bila f(x) fungsi periodik dengan periode 2L yang kontinu sepotong dan memiliki turunan kanan dan kiri pada interval [-L,L] serta turunan pertama dan ke dua f kontinu di [-L,L], maka berlaku hubungan:

$$x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right) \quad (1)$$

mana:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \quad (2)$$

$$_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)xdx, \quad n=1, 2,... \quad (3)$$

$$_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)xdx, \quad n= 1,2,... \quad (4)$$

ecuali ruas kanan (1) untuk x titik tidak kontinu dalah rata2 limit kiri dan limit kanan dari f.

B. Bila deret berbentuk (1) konvergen ıtuk x pada interval [-L,L] maka deret ini ınvergen untuk seluruh bilangan nyata x, rintegral untuk sembarang interval, serta ersifat periodik dengan perioda 2L. Di samping ı rumus (2), (3), dan (4) berlaku.

Rumus (1) disebut uraian deret *Fourier* untuk f(x), dan Rumus (2), (3), dan (4) disebut rumus *Euler*.

a. Misalkan L bilangan nyata positif. Sebuah fungsi f:$\Re \to \Re$ dikatakan sebuah *fungsi-L* bila f periodik dengan perioda 2L, kontinu sepotong-sepotong, dan memiliki turunan kanan dan kiri pada interval [-L,L], serta turunan pertama dan ke dua f kontinu di [-L,L].

b. Misalkan f dan g dua fungsi-L, maka f dan g dikatakan *ekuivalen* L bila mereka memiliki titik-titik tidak kontinu yang sama serta bernilai sama di setiap titik kontinu.Himpunan semua fungsi-fungsi yang ekuivalen dengan f disebut *kelas ekuivalen* dari f dan ditulis $[f]_L$. Subskrip L dibuang bila sudah jelas menjadi [f]. Sebuah anggota dari [f] disebut sebuah *wakil* dari [f].

c. Sebuah barisan berdomain bilangan bulat adalah fungsi dari himpunan semua bilangan bulat Z ke himpunan semua bilangan nyata $\Re$.

d. Misalkan L sebuah bilangan nyata positif, sebuah barisan-L adalah barisan berdomain bilangan bulat yang berbentuk berbentuk (2), (3), dan (4) pada teorema 1. Jadi bila c sebuah barisan-L maka c(0) = a_0, c(n) = a_n untuk n>0 serta c(n) = b_{-n} untuk n<0. Untuk selanjutnya sebuah barisan-L akan ditulis sebagai pasangan barisan (a,b) di mana a = (a_0,a_1,a_2,...) dan b = (b_1,b_2,...).

Akibat A.2. Misalkan L bilangan nyata positif. aka terdapat hubungan satu-satu F antara kelas-las ekuivalen $[f\ ]_L$ dari fungsi-fungsi terintegral f rperiode 2L dengan barisan-barisan-L c = (a,b).

Bukti. Diberikan sebuah barisan-L (a,b), maka mus untuk memperoleh sebuah wakil dari kelas uivalen yang menghasilkan barisan-L (a,b) adalah mus uraian Fourier (1). Sebaliknya diberikan buah kelas ekuivalen [f], maka rumus untuk emperoleh (a,b) dari f(x) adalah rumus-rumus Euler),(3),(4). Barisan-L yang didapat tidak bergantung da wakil yang dipilih. *Selesai.*

Definisi A.3. Misalkan f sebuah fungsi-L dan adalah hubungan satu-satu pada Akibat 1. Maka [f]) untuk selanjutnya ditulis F(f) saja. Dalam hal ini $f)=(F_1(f),F_2(f))$ di mana $F_1(f) = (a_0,a_1,a_2,\ldots)$ dan $F_2(f)$ $(b_1,b_2,\ldots)$. F disebut *Transformasi Deret fourier* dari

eorema A.3. Sifa-sifat Transformasi Deret ourier.

$F(\alpha f+\beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ untuk setiap konstanta α n β nyata (Sifat Linier)

Bila F(f) = (a,b) maka F(f ') = (a',b') di mana: $a'_0 =$ $(2L)\{f(L-)-f(-L+)\}$, $_n = L/(n\pi)\ b_n$ untuk n>0, serta $b'_n = -(n\pi/L)\ a_n$ untuk 0, yaitu $(a'_n,b'_n) = n\pi/L\ (b_n,-a_n)$. Dengan kata lain F(f = (a',b') = $n\pi/L$ (b,-a) + (c,0) di mana c adalah risan yang hanya boleh tak nol di $c_0 = 1/(2L)\{f(L-)-$ $L+)\}$.

$F(\int_0^x f(t)dt) = (a^*,b^*)$ di mana $(a^*_n,b^*_n) = L/(n\pi)$ (- $,a_n)$ untuk n=1,2,...serta nilai a^*_0 adalah konstanta mbarang.

Misalkan $f\bullet g = (1/L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\ dp$. Misalkan $f\bullet g\ ) = (a^\wedge,b^\wedge)$, F(f) = (a,b), dan $F(g) = (a^*,b^*)$. Maka $_0 = 2a_0a^*_0$ dan untuk n>0 berlaku $a^\wedge_n = a_na^*_n - b_nb^*_n$ rta $b^\wedge_n = b_na^*_n + a_nb^*_n$.

Catatan: $f\bullet g$ di atas disebut *konvolusi* dari f n g sekalipun definisi aslinya seharusnya adalah $f\bullet g) = F(f)F(g)$ di mana F adalah transformasi tegral) Fourier dan di sini tidak diperoleh sifat rupa.

Bukti.

A. Mengingat integral bersifat linier, yaitu tuk sembarang fungsi f dan g yang terintegral di [-], $\int_{-L}^{L}(\alpha f(x)+\beta g(x))\ dx = \alpha\int_{-L}^{L} f(x)dx + \beta\int_{-L}^{L} g(x)dx$, sifat terwarisakan pada rumus-rumus Euler.

B. Pertama $a'_0 = 1/(2L) \int_{-L}^{L} f\ '(x)\ dx =$ $1/(2L)\ [f(x)|_{-L}^{L} = \mathit{Lim}_{u\to 0,\ u>0}\ 1/(2L)\ [f(x)|_{-L+u}^{L-u} =$ $\mathit{Lim}_{u\to 0,\ u>0}\ 1/(2L)\{f(L-u)-f(-L+u) = 1/(2L)\{f(L-)-f(-L+)\}$.

Kemudian untuk n>0, $a'_n = (1/L) \int_{-L}^{L} f\ '(x)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx$. Bila u = *cos* $(n\pi/L)x$ dan dv = f '(x) dx, maka du = $-n\pi/L$ *sin* $(n\pi/L)x$ dx serta v = f(x). Maka $a'_n = (uv|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} vdu =$ [*cos* $(n\pi/L)x\ f(x)|_{-L}^{L} + n\pi/L \int_{-L}^{L} f(x)$ *sin* $(n\pi/L)x\ dx = n\pi/L \int_{-L}^{L} f(x)$ *sin* $(n\pi/L)x\ dx = n\pi/L\ b_n$.

Terakhir untuk n>0, $b'_n = (1/L) \int_{-L}^{L} f\ '(x)$ *sin* $(n\pi/L)x$ dx. Bila u = *sin* $(n\pi/L)x$ dan dv = f '(x) dx, maka du = $n\pi/L$ *cos* $(n\pi/L)x$ dx serta v = f(x). Maka $b'_n = (uv|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} vdu =$ [*sin* $(n\pi/L)x\ f(x)|_{-L}^{L} - n\pi/L \int_{-L}^{L} f(x)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx = -n\pi/L \int_{-L}^{L} f(x)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx = -n\pi/L\ a_n$.

C. Misalkan $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Maka g adalah sebuah anti turunan f, yaitu g adalah sebuah fungsi yang bersifat g' = f. Misalkan F(f) = (a,b) dan $F(g) = (a^*,b^*)$. Maka menurut bagian B, $a^*_0 = 1/(2L)\{G(L-)-G(-L+)\}$ untuk suatu anti turunan G dari g. Nilai a^*_0 tidak bergantung pada pilihan G, jadi hanya bergantung pada f.

Mengingat menurut B, $(a_n,b_n) = n\pi/L$ $(b^*_n,-a^*_n)$ untuk n>0, maka haruslah $(a^*_n,b^*_n) =$ $L/(n\pi)\ (-b_n,a_n)$ untuk n>0.

D. Pertama $a^\wedge_0 = 1/(2L) \int_{-L}^{L}(f\bullet g)(x)\ dx =$ $1/(2L) \int_{-L}^{L}(1/L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\ dp\ dx = 1/(2L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\ dp\ dx = 1/(2L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\ dx\ dp$. Misalkan q = x-p, maka dq = dx dengan asumsi p konstan. Maka integral itu menjadi
$1/(2L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L-p}^{L-p} f(p)g(q)\ dq\ dp = 1/(2L^2) \int_{-L}^{L} f(p)\ dp \int_{-L}^{L} g(q)\ dq =$
$1/(2L^2) \int_{-L}^{L} f(p)\ dp \int_{-L}^{L} g(q)\ dq = 2\{1/(2L) \int_{-L}^{L} f(p)\ dp$ $1/(2L)\int_{-L}^{L} g(q)\ dq\} = 2a_0a^*_0$.

Ke dua, bila n>0, $a^\wedge_n = (1/L) \int_{-L}^{L}(f\bullet g)(x)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx =$
$(1/L) \int_{-L}^{L}(1/L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\ dp$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx =$ $(1/L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dp\ dx = (1/L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)$ *cos* $(n\pi/L)x\ dx\ dp$. Seperti tadi, misalkan q = x-p. Maka x = p+q. Karena *cos* $(n\pi/L)x =$ *cos* $(n\pi/L)(p+q) =$ *cos* $(n\pi/L)p$ *cos* $(n\pi/L)q$ - *sin* $(n\pi/L)p$ *sin* $(n\pi/L)q$, maka integral di atas menjadi $(1/L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L-p}^{L-p} f(p)g(q)\{$*cos* $(n\pi/L)p$ *cos* $(n\pi/L)q$ - *sin* $(n\pi/L)p$ *sin* $(n\pi/L)q\}\ dq\ dp =$ $(1/L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(q)\{$*cos* $(n\pi/L)p$ *cos* $(n\pi/L)q$ - *sin* $(n\pi/L)p$ *sin* $(n\pi/L)q\}\ dq\ dp = (1/L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(q)$*cos* $(n\pi/L)p$ *cos* $(n\pi/L)q\ dq\ dp -(1/L^2) \int_{-L}^{L}$ *sin* $(n\pi/L)p$ *sin* $(n\pi/L)q\}\ dq\ dp = (1/L) \int_{-L}^{L}(f\ (p)$ *cos* $(n\pi/L)p\ dp\ (1/L) \int_{-L}^{L} g(q)$ *cos* $(n\pi/L)q\ dq$ -

$(1/L)\int_{-L}^{L}(f\,(p)\ \sin\,(n\pi/L)p\ dp\ (1/L)\int_{-L}^{L}g\,(q)\ \sin\,(n\pi/L)q\ dq = a_n a^*_n - b_n b^*_n$.

Terakhir, bila n>0, $a^\wedge_n = (1/L)\int_{-L}^{L}(f \blacklozenge g)(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx =$
$(1/L)\int_{-L}^{L}(1/L)\int_{-L}^{L}f(p)g(x-p)\ dp\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx = (1/L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}f(p)g(x-p)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dp\ dx = (1/L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}f(p)g(x-p)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx\ dp$. Seperti tadi, misalkan q = x-p. Maka x = p+q. Karena $\sin\,(n\pi/L)x = \sin\,(n\pi/L)(p+q) = \sin\,(n\pi/L)p\ \cos\,(n\pi/L)q + \cos\,(n\pi/L)p\ \sin\,(n\pi/L)q$, maka integral di atas menjadi $(1/L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L-p}^{L-p}f(p)g(q)\{\sin\,(n\pi/L)p\ \cos\,(n\pi/L)q + \cos\,(n\pi/L)p\ \sin\,(n\pi/L)q\}\ dq\ dp = (1/L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}f(p)g(q)\{\sin\,(n\pi/L)p\ \cos\,(n\pi/L)q + \cos\,(n\pi/L)p\ \sin\,(n\pi/L)q\}\ dq\ dp = (1/L^2)\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}f(p)g(q)\sin\,(n\pi/L)p\ \cos\,(n\pi/L)q\ dq\ dp + (1/L^2)\int_{-L}^{L}\cos\,(n\pi/L)p\ \sin\,(n\pi/L)q\}\ dq\ dp = (1/L)\int_{-L}^{L}(f\,(p)\ \sin\,(n\pi/L)p\ dp\ (1/L)\int_{-L}^{L}g(q)\ \cos\,(n\pi/L)q\ dq + (1/L)\int_{-L}^{L}(f\,(p)\ \cos\,(n\pi/L)p\ dp\ (1/L)\int_{-L}^{L}g\,(q)\ \sin\,(n\pi/L)q\ dq = b_n a^*_n + a_n b^*_n$. *Selesai.*

Sifat D dari teorema di atas memperlihatkan bahwa pada transformasi deret Fourier operasi $\blacklozenge$ yang biasa digunakan dalam transformasi Laplace tidak memberikan sifat konvolusi yang biasa. Sekalipun demikian, sifat ini amat berguna ketika yang dihadapi adalah fungsi-fungsi genap atau fungsi-fungsi ganjil. Untuk ini diperlukan definisi dan teorema berikut ini.

Definisi A.5. Misalkan $f: S \to \Re$ sebuah fungsi di mana $S \subseteq \Re$. Fungsi f dikatakan *genap* apabila $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in \Re$, sedangkan f dikatakan *ganjil* bila $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \Re$.

Teorema A.4. Misalkan f sebuah fungsi-L dan F(f) = (a,b). Bila f ganjil maka a merupakan barisan nol, sedangkan bila f genap maka b merupakan barisan nol.

Catatan: Transformasi sebuah fungsi genap biasa disebut transformasi Deret fourier Kosinus, sedangkan transformasi fungsi ganjil disebut transformasi Deret fourier Sinus.

Bukti. Misalkan f ganjil. Maka $a_0 = 1/(2L)\int_{-L}^{L}f(x)dx = 1/(2L)\{\int_{-L}^{0}f(x)dx + \int_{0}^{L}f(x)dx\} = 1/(2L)\{\int_{0}^{L}f(-x)dx + \int_{0}^{L}f(x)dx\} = 1/(2L)\{-\int_{0}^{L}f(x)dx + \int_{0}^{L}f(x)dx\} = 0$. Untuk n>0, $a_n = 1/L\int_{-L}^{L}f(x)\cos\,(n\pi/L)x\ dx = 1/L\{\int_{-L}^{0}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{\int_{0}^{L}f(-x)\ \cos\,(n\pi/L)(-x)\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{\int_{0}^{L}-f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{-\int_{0}^{L}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \cos\,(n\pi/L)x\ dx\} = 0$.

Sekarang misalkan f genap. Maka untuk n>0, $b_n = 1/L\int_{-L}^{L}f(x)\sin\,(n\pi/L)x\ dx = 1/L\{\int_{-L}^{0}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{\int_{0}^{L}f(-x)\ \sin\,(n\pi/L)(-x)\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{\int_{0}^{L}f(x)[-\sin\,(n\pi/L)x]\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx\} = 1/L\{-\int_{0}^{L}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx + \int_{0}^{L}f(x)\ \sin\,(n\pi/L)x\ dx\} = 0$. *Selesai.*

Akibat A.5. Misalkan f dan g fungsi-fungsi-L, F(f) = (a,b), F(g) = (a^*,b^*), dan $F(f \blacklozenge g) = (a^\wedge,b^\wedge)$.

a. Bila f dan g genap maka $f \blacklozenge g$ genap dan $a^\wedge_0 = 2a_0a^*_0$ serta $a^\wedge_n = a_na^*_n$ untuk n>0.

b. Bila f dan g ganjil maka $f \blacklozenge g$ genap dan $a^\wedge_0 = 0$ serta $a^\wedge_n = -b_nb^*_n$ untuk n>0.

c. Bila f genap dan g ganjil maka $f \blacklozenge g$ ganjil dan $b^\wedge_n = a_nb^*_n$.

d. Bila f ganjil dan g genap maka $f \blacklozenge g$ ganjil dan $b^\wedge_n = b_na^*_n$.

Bukti.

a. Bila f dan g masing-masing genap, maka F(f) = (a,0) dan F(g) = $(a^*,0)$. Menurut teorema A.1.3, $a^\wedge_0 = 2a_0a^*_0$ serta $a^\wedge_n = a_na^*_n$. Sedangkan $b^\wedge_n = 0$ untuk n > 0.

b. Bila f dan g masing-masing ganjil, maka F(f) = (0,b) dan F(g) = $(0,b^*)$. Menurut teorema A.1.3, $a^\wedge_0 = 2\cdot 0\cdot 0 = 0$ serta $F(f \blacklozenge g) = (-b_nb^*_n,0)$. Jadi $a^\wedge_n = -b_nb^*_n$. Sedangkan $b^\wedge_n = 0$ untuk n > 0.

c. Bila f genap dan g ganjil maka F(f) = (a,0) dan F(g) = $(0,b^*)$. Menurut teorema A.1.3, $b^\wedge_n = a_nb^*_n$. Sedangkan $a^\wedge_n = 0$ untuk $n \geq 0$.

d. Bila f ganjil dan g genap maka F(f) = (0,b) dan F(g) = $(a^*,0)$. Menurut teorema A.1.3, $b^\wedge_n = b_na^*_n$. Sedangkan $a^\wedge_n = 0$ untuk $n \geq 0$. *Selesai.*

Berikut ini adalah analogi masalah turunan dan integral hasil transformasi.

Definisi A.6.. Misalkan c = (a,b) sebuah barisan-L. Turunan c adalah $\Delta c = (\Delta a,\Delta b)$ di mana Δa adalah barisan $\Delta a_0 = a_0$, serta untuk n>0, $\Delta a_n = a_n-a_{n-1}$ sedangkan Δb adalah barisan $\Delta b_1 = b_1$, serta $\Delta b_n = b_n-b_{n-1}$ untuk n>1.

Teorema A.6. Misalkan f sebuah fungsi-L, dan F(f) = (a,b). Bila g(x) adalah sebuah fungsi-L yang bersifat F(g) = (a^*,b^*) di mana $a^*_0 = 0$, $a^*_n = a_{n-1}$ untuk n>0, $b^*_1 = 0$, dan $b^*_n = b_{n-1}$, maka F(f-g) = Δ F(f).

Bukti. Misalkan h adalah deret Fourier dengan koefisien Δ F(f). Maka $h(x) = \Delta a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ \Delta a_n \cos (n\pi/L)x + \Delta b_n \sin (n\pi/L)x\ ] = a_0 + b_1 \sin (\pi/L)x + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - a_{n-1}) \cos (n\pi/L)x + (b_{n+1}\text{-bn}) \sin ([n+1]\pi/L)x\ ] = a_0 + b_1 \sin (\pi/L)x + \sum_{n=1}^{\infty} [\ a_n \cos (n\pi/L)x + b_{n+1} \sin ([n+1]\pi/L)x\ ] - \sum_{n=1}^{\infty} [\ a_{n-1} \cos (n\pi/L)x + b_n \sin ([n+1]\pi/L)x\ ] = f(x) - g(x)$ di mana $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ a_{n-1} \cos (n\pi/L)x + b_n \sin ([n+1]\pi/L)x\ ]$. Terlihat bahwa $F(g) = (a^*,b^*)$ di mana $a^*_0 = 0$, $a^*_n = a_{n-1}$ untuk $n>0$, $b^*_1 = 0$, dan $b^*_n = b_{n-1}$. *Selesai.*

Definisi A.7. Misalkan c = (a,b) sebuah barisan-L. *Integral dari* c adalah barisan $\int c$ yang bersifat $\Delta\int c = c$.

Teorema A.7. Misalkan c = (a,b) sebuah barisan-L. Misalkan $\int c$ sebuah barisan-L. Maka $\int c$ adalah barisan c^* di mana $a^*_0 = a_0$, $b^*_1 = b_1$, $a^*_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ untuk $k>0$, $b^*_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ untuk $k>1$.

Bukti. Menurut teorema A6, $\Delta\int F(f) = F(u-v)$ di mana u adalah deret Fourier berkoefisien $\int F(f)$ dan v adalah deret berkoefisien $\int F(f)$ yang telah diubah dan digeser sebagaimana pengubahan koefisien f menjadi koefisien g pada teorema itu. Jadi $a_0 = \int a_0$, $b_1 = \int b_1$, $a_n = \int a_n - \int a_{n-1}$ untuk $n>0$, serta $b_n = \int b_n - \int b_{n-1}$, untuk $n>0$. Maka $\int c$ secara keseluruhan dapat diketahui. Tepatnya: $\int a_1 = a_1 + \int a_0 = a_1 + a_0$, kemudian $\int a_2 = a_2 + \int a_1 = a_2 + a_1 + a_0$, demikian seterusnya sehingga didapat $\int a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ untuk $k>0$. Juga: $\int b_2 = b_2 + \int b_1 = b_2 + b_1$, kemudian $\int b_3 = b_3 + \int b_2 = b_3 + b_2 + b_1$, demikian seterusnya sehingga didapat $\int b_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ untuk $k>1$. *Selesai.*

Berikut ini adalah sebuah teorema yang menyangkut pergeseran fungsi atau *shifting* pada fungsi asal.

Teorema A.8. Pergeseran Fungsi Asal. Misalkan C konstanta nyata, f sebuah fungsi-L serta $g(x) = f(x+C)$ di mana $F(f) = (a,b)$ dan $F(g) = (a^*,b^*)$. Maka $a^*_0 = a_0$, serta untuk $n>0$, $a^*_n = a_n \cos (n\pi/L)C + b_n \sin (n\pi/L)C$ dan $b^*_n = b_n \cos (n\pi/L)C - a_n \sin (n\pi/L)C$, yaitu
$(a^*_n\ b^*_n)^T = A(n)\ (a_n\ b_n)^T$ dengan A(n) =

cos (nπ/L)C	*sin* (nπ/L)C
- *sin* (nπ/L)C	*cos* (nπ/L)C

Bukti. Dengan perhitungan langsung $a^*_0 = 1/(2L)\int_{-L}^{L} g(x)dx = 1/(2L)\int_{-L}^{L} g(x)dx = 1/(2L)\int_{-L}^{L} f(x+C)dx = 1/(2L)\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C)d(x+C) = a_0$ mengingat f berperioda 2L.

Juga $a^*_n = 1/L\int_{-L}^{L} g(x) \cos (n\pi/L)x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x+C) \cos (n\pi/L)x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x+C) \cos (n\pi/L)(x+C-C)\ dx = 1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \cos (n\pi/L)(x+C-C)\ d(x+C) = 1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \{\cos (n\pi/L)(x+C) \cos (n\pi/L)C + \sin (n\pi/L)(x+C) \sin (n\pi/L)C\}\ d(x+C) = \cos (n\pi/L)C\ \{1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \cos (n\pi/L)(x+C)d(x+C)\} + \sin (n\pi/L)C\{1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \cos (n\pi/L)(x+C)d(x+C)\} = \cos (n\pi/L)C\ a_n + \sin (n\pi/L)C\ b_n$.

Dengan cara serupa, $b^*_n = 1/L\int_{-L}^{L} g(x) \sin (n\pi/L)x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x+C) \sin (n\pi/L)x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x+C) \sin (n\pi/L)(x+C-C)\ dx = 1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \sin (n\pi/L)(x+C-C)\ d(x+C) = 1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \{\sin (n\pi/L)(x+C) \cos (n\pi/L)C - \cos (n\pi/L)(x+C) \sin (n\pi/L)C\}\ d(x+C) = \cos (n\pi/L)C\ \{1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \sin (n\pi/L)(x+C)d(x+C)\} - \sin (n\pi/L)C\{1/L\int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) \cos (n\pi/L)(x+C)d(x+C)\} = \cos (n\pi/L)C\ b_n - \sin (n\pi/L)C\ a_n$. *Selesai.*

Teorema A.9. Pergeseran Hasil Transformasi. Misalkan f sebuah fungsi-L dengan $F(f) = (a,b)$, M dan N bilangan-bilangan asli >0 dan (a^*,b^*) adalah sebuah barisan dengan $a^*_n = a_{n+M}$ untuk $n=0,1,2,\ldots$ serta $b^*_n = b_{n+N}$ untuk $n=1,2,3,\ldots$ Misalkan pula $F(2f(x) \cos (M\pi/L)x) = (a^\wedge,b^\wedge)$, $F(2f(x) \sin (M\pi/L)x) = (a',b')$, $F(2f(x) \cos (N\pi/L)x) = (a^+,b^+)$, dan $F(2f(x) \sin (N\pi/L)x) = (a'',b'')$. Maka $a^*_0 = a^\wedge_0$, $a^*_n = (a^\wedge_n - b'_n)/2$, $b^*_n = (b^+_n + a''_n)/2$.

Bukti. Misalkah $F(2f(x) \cos (M\pi/L)x) = (a^\wedge,b^\wedge)$ dan $F(2f(x) \sin (M\pi/L)x) = (a',b')$, serta $F(2f(x) \cos (N\pi/L)x) = (a^+,b^+)$ dan $F(2f(x) \sin (N\pi/L)x) = (a'',b'')$.

Maka $a^*_0 = a_M = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)\cos (M\pi/L)x\ dx = 1/(2L)\int_{-L}^{L} 2f(x) \cos (M\pi/L)x\ dx = a^\wedge_0$.

Kemudian $a^*_n = a_{n+M} = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)\cos [(n+M)\pi/L]x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)[\cos (n\pi/L)x \cos (M\pi/L)x - \sin (n\pi/L)x \sin (M\pi/L)x]\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)\cos (M\pi/L)x \cos (n\pi/L)x\ dx - 1/L\int_{-L}^{L} f(x) \sin (M\pi/L)x \sin (n\pi/L)x\ dx = (1/2)[1/L\int_{-L}^{L} 2f(x) \cos (M\pi/L)x \cos (n\pi/L)x\ dx] - (1/2)[1/L\int_{-L}^{L} 2f(x) \sin (M\pi/L)x \sin (n\pi/L)x\ dx] = (1/2)a^\wedge_n - (1/2)b'_n = (a^\wedge_n - b'_n)/2$.

Terakhir, $b^*_n = b_{n+N} = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)\sin [(n+N)\pi/L]x\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)[\sin (n\pi/L)x \cos (N\pi/L)x + \cos (n\pi/L)x \sin (N\pi/L)x]\ dx = 1/L\int_{-L}^{L} f(x) \cos (N\pi/L)x \sin (n\pi/L)x\ dx + 1/L\int_{-}$

$_{L}^{L} f(x)$ *sin* $(N\pi/L)x$ *cos* $(n\pi/L)x\,dx = (1/2)[1/L\int_{-L}^{L} 2f(x)$ *cos* $(N\pi/L)x$ *sin* $(n\pi/L)x\,dx] + (1/2)[1/L\int_{-L}^{L} 2f(x)$ *sin* $(N\pi/L)x$ *cos* $(n\pi/L)x\,dx] = (1/2)b^{*}_{n} + (1/2)a''_{n} = (b^{*}_{n} + a''_{n})/2$. *Selesai.*

Deret Fourier Kompleks dan Transformasinya

Teorema B.1. Rumus Deret fourier dari Fungsi Berperiode 2L.

A. Bila f(x) fungsi periodik dengan periode 2L yang kontinu sepotong-sepotong dan memiliki turunan kanan dan kiri pada interval [-L,L] serta turunan pertama dan ke dua f kontinu di [-L,L], maka berlaku hubungan:

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x}$ (1)

di mana:

$c_n = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x)e^{-i(n\pi/L)x}\,dx$, $n=1,2,\ldots.$ (2)

kecuali ruas kanan (1) untuk x titik tidak kontinu adalah rata2 limit kiri dan limit kanan dari f.

B. Bila deret berbentuk (1) konvergen untuk x pada interval [-L,L] maka deret ini konvergen untuk seluruh bilangan nyata x, terintegral untuk sembarang interval, serta bersifat periodik dengan perioda 2L. Di samping itu rumus (2) berlaku.

Catatan:

1. Rumus (1) disebut *uraian deret Fourier kompleks* untuk f(x)
2. Rumus (2) disebut *rumus Euler kompleks*

Definisi B.1. [1] hlm 611. Untuk deret Fourier kompleks transformasinya disebut *transformasi deret Fourier kompleks* dan ditulis G serta barisan-L nya disebut *barisan*-L *kompleks* serta fungsi-L nya tetap disebut *fungsi*-L *kompleks.*

Teorema B.2. Sifat-sifat Transformasi Deret fourier Kompleks.

A. $G(\alpha f+\beta g) = \alpha G(f) + \beta G(g)$ untuk setiap konstanta α dan β nyata (Sifat Linier)

B. Bila $G(f) = c$ maka $G(f\,') = c'$ di mana untuk n bilangan bulat $c'_n = (-1)^n/(2L)\,[f(L-)-f(-L+)] + (in\pi)/L\, c_n$.

C. $G(\int_0^x f(t)dt) = c^*$ di mana untuk n bilangan bulat $c^*_n = 1/(2in\pi)\,(-1)^{n+1}\,[f(L-)-f(L+)] + L/(in\pi)\,c_n$.

D. Misalkan $f\bullet g = (1/2L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\,dp$. Misalkan $G(f\bullet g\,) = o^\wedge$, $G(f) = c$, dan $G(g) = c^*$. Maka untuk n bilangan bulat berlaku $c^\wedge_n = c_n c^*_n$.

Bukti.

A. Mengingat integral bersifat linier, yaitu untuk sembarang fungsi f dan g yang terintegral di [-L,L], $\int_{-L}^{L}(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_{-L}^{L} f(x)dx + \beta\int_{-L}^{L} g(x)dx$, sifat ini terwarisakan pada rumus Euler untuk deret Fourier kompleks.

B. Kemudian untuk n>0, $c'_n = 1/(2L) \int_{-L}^{L} f\,'(x)\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dx$. Bila $u = e^{-i(n\pi/L)x}$ dan $dv = f\,'(x)\,dx$, maka $du = -(in\pi)/L\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dx$ serta $v = f(x)$. Maka $2Lc'_n = (uv|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} vdu = [e^{-i(n\pi/L)x} f(x)|_{-L}^{L} + (in\pi)/L \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dx = [e^{-i(n\pi/L)x} f(x)|_{-L}^{L} + (2in\pi)\, c_n =$ *Lim* $_{u\to 0,\ u>0}\ [e^{-i(n\pi/L)x} f(x)|_{-L+u}^{L-u} + (2in\pi)\, c_n = [e^{-i(n\pi/L)(L-)} f(L-) - e^{-i(n\pi/L)(-L+)} f(-L+)] + (2in\pi)\, c_n = [e^{-in\pi} f(L-) - e^{in\pi} f(-L+)] + (2in\pi)\, c_n$. Jadi $c'_n = 1/(2L)\, [e^{-in\pi} f(L-) - e^{in\pi} f(-L+)] + (in\pi)/L\, c_n = 1/(2L)\,($*cos* $n\pi)\,[f(L-)-f(-L+)] + (in\pi)/L\, c_n = (-1)^n/(2L)\,[f(L-)-f(-L+)] + (in\pi)/L\, c_n$.

C. Misalkan $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Maka g adalah sebuah anti turunan f, yaitu g adalah sebuah fungsi yang bersifat $g' = f$. Misalkan $G(f) = c$ dan $G(g) = c^*$. Maka menurut bagian B, $c_n = (-1)^n/(2L)\,[f(L-)-f(L+)] + (in\pi)/L\, c^*_n$. Maka $c^*_n = 1/(2in\pi)\,(-1)^{n+1}\,[f(L-)-f(-L+)] + L/(in\pi)\, c_n$.

D. Untuk n bilangan bulat, $c^\wedge_n = (1/2L) \int_{-L}^{L}(f\bullet g)(x)e^{-i(n\pi/L)x}\,dx =$
$(1/2L) \int_{-L}^{L}(1/2L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\,dp\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dx = (1/4L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dp\,dx = (1/4L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\, e^{-i(n\pi/L)x}\,dx\,dp$. Misalkan $q = x-p$. Maka $x = p+q$. Karena $e^{-i(n\pi/L)x} = e^{-i(n\pi/L)(p+q)} = e^{-i(n\pi/L)p}e^{-i(n\pi/L)q}$, maka integral di atas menjadi $(1/4L^2) \int_{-L}^{L}\int_{-L-p}^{L-p} f(p)g(q)\{e^{-i(n\pi/L)p}e^{-i(n\pi/L)q}\}\,dq\,dp = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(p)e^{-i(n\pi/L)p}\,dp\ (1/2L) \int_{-L}^{L} g\,(q)e^{-i(n\pi/L)q}\,dq = c_n c^*_n$. *Selesai.*

Sifat D dari teorema di atas memperlihatkan bahwa untuk deret Fourier kompleks rumus konvolusi bekerja sebagaimana biasanya pada transformasi

Laplace. Berikut ini akan dibahas sifat-sifat yang merupakan analogi turunan dan integral hasil transformasi.

Definisi B.2. [1] 289. Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. *Turunan dari* c adalah sebuah barisan Δc dengan $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$ untuk bilangan bulat n.

Teorema B.3. Misalkan f sebuah fungsi-L, dan G(f) = c. Bila g(x) adalah sebuah fungsi-L yang bersifat G(g) = c* di mana $c^*_n = c_{n-1}$ untuk n bilangan bulat, maka $G(f-g) = \Delta\, G(f)$.

Bukti. Misalkan h adalah deret Fourier kompleks dengan koefisien $\Delta G(f)$. Maka $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\ \Delta c_n e^{i(n\pi/L)x}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n - c_{n-1})\ e^{i(n\pi/L)x}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-1} e^{i(n\pi/L)x} = f(x) - g(x)$ di mana $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-1} e^{i(n\pi/L)x}$. Terlihat bahwa G(g) = c* di mana $c^*_n = c_{n-1}$ untuk n bilangan bulat. *Selesai.*

Definisi B.3. [1] 291. Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. *Integral dari* c adalah barisan-L kompleks sehingga $\Delta\int c = c$.

Teorema B.4. Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. Misalkan $\int c$ sebuah barisan-L kompleks. Maka $\int c$ berbentuk barisan c* di mana $c^*_0 = K$ konstanta sembarang, $c^*_n = K + \sum_{n=1}^{k} c_n$ untuk k>0 dan $c^*_n = K - \sum_{n=1}^{-k} c_n$ untuk k<0.

Bukti. Misalkan f adalah fungsi-L sehingga G(f) =c. Menurut teorema B.3, $\Delta\int G(f) = G(u-v)$ di mana u adalah deret berkoefisien $\int G(f)$ dan v adalah deret berkoefisien $\int G(f)$ yang digeser ke kiri satu langkah, yaitu indeks n diisi oleh koefisien ke n-1. Jadi $c_n = \int c_n - \int c_{n-1}$. Bila untuk suatu n nilai $\int c_n$ diketahui, sebutlah $\int c_0 = K$, maka $\int c$ diketahui dari rumus $c_n = \int c_n - \int c_{n-1}$. Tepatnya: $\int c_1 = c_1 + \int c_0 = c_1 + K$, kemudian $\int c_2 = c_2 + \int c_1 = c_2 + c_1 + K$, demikian seterusnya sehingga didapat $\int c_k = K + \sum_{n=1}^{k} c_n$ untuk k>0. Sekarang $\int c_{-1} = \int c_0 - c_0 = K - c_0$, kemudian $\int c_{-2} = \int c_{-1} - c_{-1} = K - c_0 - c_{-1}$, demikian seterusnya sehingga $\int c_{-k} = K - \sum_{n=1}^{k} c_{-n}$ untuk k>0. *Selesai.*

Berikut ini teorema tentang *shifting* pada fungsi asal untuk transformasi deret Fourier kompleks.

Teorema B.5. Pergeseran Fungsi Asal. Misalkan C konstanta nyata dan f sebuah fungsi-L, g(x) = f(x+C), serta G(f) = c dan G(g) = c*. Maka $c^*_n = c_n e^{i(n\pi/L)C}$.

Bukti. Untuk n bilangan bulat berlaku: $c^*_n = (1/2L) \int_{-L}^{L} g(x) e^{-i(n\pi/L)x}\, dx = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x+C) e^{-i(n\pi/L)x}\, dx = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x+C) e^{-i(n\pi/L)(x+C-C)}\, dx = (1/2L) \int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) e^{-i(n\pi/L)(x+C-C)}\, d(x+C) = (1/2L) \int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) e^{-i(n\pi/L)(x+C)}\ e^{i(n\pi/L)C} d(x+C) = e^{i(n\pi/L)C} (1/2L) \int_{-L+C}^{L+C} f(x+C) e^{-i(n\pi/L)(x+C)} d(x+C) = e^{i(n\pi/L)C} c_n$. *Selesai.*

Teorema B.6. Pergeseran Hasil Transformasi. Misalkan M bilangan bulat tak nol dan f adalah sebuah fungsi-L dengan G(f) = c, serta $G(f(x)e^{-i(M\pi/L)x}) = c\hat{}$. Misalkan $c^*_n = c^*_{n+M}$ untuk setiap bilangan bulat n. Maka $c^* = c\hat{}$.

Bukti. $c^*_n = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x) e^{-[i(n+M)\pi/L]x}\, dx = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i(n\pi/L)x}\ e^{-i(M\pi/L)x}\, dx = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i(M\pi/L)x}\ e^{-i(n\pi/L)x}\, dx = c\hat{}_n$. *Selesai.*

Adapun gejala Gibbs, ia dialami pula oleh transformasi deret Fourier kompleks karena ia tidak lain dari cara penulisan lain dari transformasi deret Fourier nyata ketika diterapkan pada fungsi-fungsi nyata.

Tabel 1 menunjukkan perbandingan sifat transformasi Fourier nyata maupun kompleks dengan transformasi deret Fourier baik nyata maupun kompleks.

KESIMPULAN

Transformasi deret Fourier nyata memiliki ciri-ciri transformasi Fourier nyata termasuk transformasi sinus dan kosinus, namun mengalami kepelikan dalam hal konvolusi. Hal ini disebabkan karena kasus konvolusinya merupakan kombinasi linier dari empat kasus yang diberikan pada Akibat A.5. Pendefinisian "turunan" dan "integral" untuk barisan-L agak kurang alami mengingat tidak terdapatnya kesinambungan koefisien-koefisien sinus dan kosinus secara alami. Namun suatu versi analogi dengan teorema turunan dan integral hasil transformasi masih dapat diperoleh.

Transformasi deret Fourier kompleks memiliki ciri transformasi Fourier kompleks secara lebih utuh. Bahkan konvolusi berjalan sebagaimana diharapkan. Konsep turunan dan integral barisan-L kompleks juga lebih alami. Semua kemulusan ini dibayar dengan sifat koefisien yang merupakan bilangan kompleks, hal ini memerlukan modifikasi terlebih dahulu untuk dapat diterapkan, namun setidaknya perhitungan berjalan lebih lancar.

Penggunaan transformasi deret Fourier suai untuk menangani masalah yang memiliki main terbatas. Penanganannya mungkin ngan memperluas domain tersebut sehingga pat dipandang sebagai masalah dengan main tak hingga namun periodik.

FTAR PUSTAKA

i Hanawati, *Aspek Transformasi dari Deret Fourier Nyata dan Kompleks,* Skripsi Sarjana Jurusan Matematika Universitas Islam Bandung, Februari 2006.

Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley & Sons, New York 1993

Lipschitz, Seymour, *Fourier Analysis,* Schaum Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1974.

Ravi Ahmad Salim, Elyas Kustiawan, Erwin Harahap, Evi Hanawati, *Transformasi Deret Fourier Nyata,* Majalah Ilmiah Universitas Islam Bandung, 2006.

Tabel 1.
Perbandingan sifat transformasi Fourier dan deret Fourier

at	**Transformasi Fourier Nyata**	**Transformasi Fourier Komplek**	**Transformasi Deret Fourier Nyata**	**Transformasi Deret Fourier Komplek**
Rumus Deret u Integral urier	$f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\ dw$ untuk x nyata	$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{iwx} dw$ untuk x nyata	$f(x) = a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ untuk x nyata	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ dw untuk x nyata
Rumus Euler	$A(w) = 2/\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx\ dx$ $B(w) = 2/\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx\ dx$ untuk $w \geq 0$.	$C(w) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx$ untuk w bilangan nyata.	$a_0 = 1/(2L) \int_{-L}^{L} f(x)dx$ $a_n = 1/L \int_{-L}^{L} f(x) \cos nx\ dx$ untuk n=1,2,3,... $b_n = 1/L \int_{-L}^{L} f(x) \sin nx\ dx$ untuk n=1,2,3,...	$c_n = 1/(2L) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} dx$ untuk n bilangan bulat
Definisi nsformasi	F(f) = (A,B)	G(f) = C	F(f) = (a,b)	G(f) = c
Kelinieran: f+βg) = f)+βF(g) untuk iap bilangan ta α, β.	Ya	Ya	Ya	Ya
Rumus nsformasi unan	Bila F(f) = (A,B) maka F(f ') = (A^*,B^*) di mana: $A^*(w) = wB(w)-(2/\pi)f(0)$, dan $B^*(w) = -wA(w)$	Bila G(f) = C maka G(f ') = C^* di mana $C^*(w) = iwC(w)$	Bila F(f) = (a,b) maka F(f ') = (a',b') di mana: $a'_0 = 1/(2L)\{f(L-)-f(-L+)\}$, $a'_n = L/(n\pi)\ b_n$ untuk n>0, serta $b'_n = -(n\pi/L)\ a_n$ untuk n>0, yaitu $(a'_n,b'_n) = n\pi/L\ (b_n,-a_n)$.	Bila G(f) = c maka G(f ') = c' di mana untuk n bilangan bulat $c'_n = (-1)^n/(2L)\ [f(L-)-f(-L+)] + (in\pi)/L\ c_n$.
Rumus nsformasi egral	Bila F(f) = (A.B) maka $F(\int_0^x f(t)dt) = (A^*,B^*)$ di mana $A^*(w) = -(1/w)B(w)$ dan $B^* = (1/w)(A(w) + (2/\pi)g(0))$	Bila G(f) = C maka $G(\int_0^x f(t)dt) = C^*$ di mana $C^*(w) = 1/(iw)C(w)$	Bila F(f) = (a,b) maka $F(\int_0^x f(t)dt) = (a^*,b^*)$ di mana $(a^*_n,b^*_n) = L/(n\pi)\ (-b_n,a_n)$ untuk n=1,2,...serta nilai a^*_0 adalah konstanta sembarang.	Bila G(f) = c maka $G(\int_0^x f(t)dt) = c^*$ di mana untuk n bilangan bulat $c^*_n = 1/(2in\pi)\ (-1)^{n+1}\ [f(L-)-f(L+)] + L/(in\pi)\ c_n$.

Tabel 1.
Perbandingan sifat transformasi Fourier dan deret Fourier (Lanjutan)

Sifat	Transformasi Fourier Nyata	Transformasi Fourier Komplek	Transformasi Deret Fourier Nyata	Transformasi Deret Fourier Komplek
7. Rumus Transformasi Konvolusi	Misalkan $f\blacklozenge g = (2/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp$. Misalkan $F(f\blacklozenge g) = (A^\wedge, B^\wedge)$, $F(f) = (A,B)$, dan $F(g) = (A^*, B^*)$. Maka $a^\wedge_0 = 2a_0a^*_0$ dan untuk $n>0$ berlaku $A^\wedge(w) = A(w)A^*(w) - B(w)B^*(w)$ serta $B^\wedge(w) = B(w)A^*(w) + A(w)B^*(w)$.	Misalkan $f\blacklozenge g = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp$. Misalkan $G(f\blacklozenge g) = C^\wedge$, $G(f) = C$, dan $G(g) = C^*$. Maka untuk w bilangan nyata berlaku $C^\wedge(w) = C(w)C^*(w)$.	Misalkan $f\blacklozenge g = (1/L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\,dp$. Misalkan $F(f\blacklozenge g) = (a^\wedge, b^\wedge)$, $F(f) = (a,b)$, dan $F(g) = (a^*, b^*)$. Maka $a^\wedge_0 = 2a_0a^*_0$ dan untuk $n>0$ berlaku $a^\wedge_n = a_na^*_n - b_nb^*_n$ serta $b^\wedge_n = b_na^*_n + a_nb^*_n$.	Misalkan $f\blacklozenge g = (1/2L)\int_{-L}^{L} f(p)g(x-p)\,dp$. Misalkan $G(f\blacklozenge g) = c^\wedge$, $G(f) = c$, dan $G(g) = c^*$. Maka untuk n bilangan bulat berlaku $c^\wedge_n = c_nc^*_n$.
8. Rincian Rumus Konvolusi	Misalkan f dan g fungsi-fungsi dengan $F(f) = (a,b)$, $F(g) = (a^*, b^*)$, dan $F(f\blacklozenge g) = (a^\wedge, b^\wedge)$. a. Bila f dan g genap maka $f\blacklozenge g$ genap dan $A^\wedge(w) = A(w)A^*(w)$ untuk $w \geq 0$. b. Bila f dan g ganjil maka $f\blacklozenge g$ genap dan $A^\wedge(w) = -B(w)B^*(w)$ untuk $w \geq 0$. c. Bila f genap dan g ganjil maka $f\blacklozenge g$ ganjil dan $B^\wedge(w) = A(w)B^*(w)$. d. Bila f ganjil dan g genap maka $f\blacklozenge g$ ganjil dan $B^\wedge(w) = B(w)A^*(w)$.	Rincian serupa dengan teorema konvolusi: $G(f\blacklozenge g) = G(f)G(g)$	Misalkan f dan g fungsi-fungsi-L, $F(f) = (a,b)$, $F(g) = (a^*, b^*)$, dan $F(f\blacklozenge g) = (a^\wedge, b^\wedge)$. a. Bila f dan g genap maka $f\blacklozenge g$ genap dan $a^\wedge_0 = 2a_0a^*_0$ serta $a^\wedge_n = a_na^*_n$ untuk $n>0$. b. Bila f dan g ganjil maka $f\blacklozenge g$ genap dan $a^\wedge_0 = 0$ serta $a^\wedge_n = -b_nb^*_n$ untuk $n>0$. c. Bila f genap dan g ganjil maka $f\blacklozenge g$ ganjil dan $b^\wedge_n = a_nb^*_n$. d. Bila f ganjil dan g genap maka $f\blacklozenge g$ ganjil dan $b^\wedge_n = b_na^*_n$.	Rincian serupa dengan teorema konvolusi: $F(f\blacklozenge g) = F(f)F(g)$
9. Definisi Turunan Transformasi	Definisi turunan fungsi biasa	Definisi turunan fungsi biasa	*Misalkan $c = (a,b)$ sebuah barisan-L. *Turunan dari* c adalah $\Delta c = (\Delta a, \Delta b)$ di mana Δa adalah barisan $\Delta a_0 = a_0$, serta untuk $n>0$, $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ sedangkan Δb adalah barisan $\Delta b_1 = b_1$, serta $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$ untuk $n>1$.	Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. *Turunan dari* c adalah sebuah barisan Δc dengan $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$ untuk bilangan bulat n.

Tabel 1.
Perbandingan sifat transformasi Fourier dan deret Fourier (Lanjutan)

ıt	Transformasi Fourier Nyata	Transformasi Fourier Komplek	Transformasi Deret Fourier Nyata	Transformasi Deret Fourier Komplek
Teorema unan nsformasi	Misalkan f sebuah fungsi dengan F(f) = (A,B). Maka fungsi g(x) = xf(x) bersifat F(g) = (A^*,B^*) dengan $A^*(w) = B'(w)$ dan $B^*(w) = -A'(w)$.	Misalkan f sebuah fungsi dengan G(f) = C. Maka fungsi g(x) = (-ix)f(x) bersifat G(g) = C'(w)	Misalkan f sebuah fungsi-L, dan F(f) = (a,b). Bila g(x) adalah sebuah fungsi-L yang bersifat F(g) = (a^*,b^*) di mana $a^*_0 = 0$, $a^*_n = a_{n-1}$ untuk n>0, $b^*_1 = 0$, dan $b^*_n = b_{n-1}$, maka F(f-g) = Δ F(f).	Misalkan f sebuah fungsi-L, dan G(f) = c. Bila g(x) adalah sebuah fungsi-L yang bersifat G(g) = c^* di mana $c^*_n = c_{n-1}$ untuk n bilangan bulat, maka G(f-g) = Δ G(f).
Definisi gral nsformasi	Definisi integral biasa	Definisi integral biasa	**Misalkan c = (a,b) sebuah barisan-L. *Integral dari* c adalah barisan $\int c$ yang bersifat $\Delta\int c = c$.	Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. *Integral dari* c adalah barisan-L kompleks sehingga $\Delta\int c = c$.
Teorema gral nsformasi	Misalkan f sebuah fungsi dengan F(f) = (A,B). Maka fungsi g(x) = f(x)/x bersifat F(g) = (A^*,B^*) dengan $A^*(w) = -\int_{-\infty}^{w} B(v)dv$ dan $B^*(w) = \int_{-\infty}^{w} B(v)dv$.	Misalkan f sebuah fungsi dengan G(f) = C. Maka fungsi g(x) = f(x)/(-ix) bersifat G(g) = $\int_{-\infty}^{w} C(v)dv$.	Misalkan c = (a,b) sebuah barisan-L. Misalkan $\int c$ sebuah barisan-L. Maka $\int c$ adalah barisan c^* di mana $a^*_0 = a_0$, $b^*_1 = b_1$, $a^*_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ untuk k>0, $b^*_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ untuk k>1.	Misalkan c sebuah barisan-L kompleks. Misalkan $\int c$ sebuah barisan-L kompleks. Maka $\int c$ berbentuk barisan c^* di mana c^*_0 = K konstanta sembarang, $c^*_n = K+\sum_{n=1}^{k} c_n$ untuk k>0 dan $c^*_n = K-\sum_{n=1}^{-k} c_n$ untuk k<0.
Teorema geseran a Fungsi l	Misalkan C konstanta nyata, f sebuah fungsi dengan F(f) = (A,B), g(x) = f(x+C), dan F(g) = (A^*,B^*). Maka $A^*(w)$ = A(w) *cos* wC + B(w) *sin* wC dan $B^*(w)$ = B(w) *cos* (nπ/L)C –A(w) *sin* (nπ/L)C	Misalkan K konstanta nyata dan f sebuah fungsi dengan G(f) = C, g(x) = f(x+K), serta G(g) = C^*. Maka $C^*(w) = C(w)e^{iwC}$.	Misalkan C konstanta nyata, f sebuah fungsi-L serta g(x) = f(x+C) di mana F(f) = (a,b) dan F(g) = (a^*,b^*). Maka $a^*_0 = a_0$, serta untuk n>0, $a^*_n = a_n$ *cos* (nπ/L)C + b_n *sin* (nπ/L)C dan $b^*_n = b_n$ *cos* (nπ/L)C -a_n *sin* (nπ/L)C	Misalkan C konstanta nyata dan f sebuah fungsi-L, g(x) = f(x+C), serta G(f) = c dan G(g) = c^*. Maka $c^*_n = c_n e^{i(n\pi/L)C}$.

Tabel 1.
Perbandingan sifat transformasi Fourier dan deret Fourier (Lanjutan)

Sifat	Transformasi Fourier Nyata	Transformasi Fourier Komplek	Transformasi Deret Fourier Nyata	Transformasi Deret Fourier Komplek
14. Teorema Pergeseran pada Hasil Transformasi	Misalkan f sebuah fungsi dengan $F(f) = (A,B)$, μ dan η bilangan-bilangan nyata positif dan (A^*,B^*) adalah pasangan fungsi di mana $A^*(w) = A(w+\mu)$ untuk setiap $w>0$ serta $B^*(w) = B(w+\eta)$ untuk $w\geq 0$. Misalkan pula $F(2f(x)\ cos\ \mu x) = (A^\wedge,B^\wedge)$, $F(2f(x)\ sin\ \mu x) = (A',B')$, $F(2f(x)\ cos\ \eta x) = (A^{\cdot},B^{\cdot})$, dan $F(2f(x)\ sin\ \eta x) = (A'',B'')$. Maka $A^*(w) = ½\ (A^\wedge(w)-B'(w))$, $b^*_n = ½\ (B^{\cdot}(w)+A''(w))$.	Misalkan μ bilangan nyata tak nol dan f adalah sebuah fungsi dengan $G(f) = C$, serta $G(f(x)e^{-i\mu x}) = C^\wedge$. Misalkan $C^*(w) = C^*(w+\mu)$ untuk setiap bilangan nyata w. Maka $C^* = C^\wedge$.	Misalkan f sebuah fungsi-L dengan $F(f) = (a,b)$, M dan N bilangan-bilangan asli >0 dan (a^*,b^*) adalah sebuah barisan dengan $a^*_n = a_{n+M}$ untuk $n=0,1,2,\ldots$ serta $b^*_n = b_{n+N}$ untuk $n=1,2,3,\ldots$ Misalkan pula $F(2f(x)\ cos\ (M\pi/L)x) = (a^\wedge,b^\wedge)$, $F(2f(x)\ sin\ (M\pi/L)x) = (a',b')$, $F(2f(x)\ cos\ (N\pi/L)x) = (a^{\cdot},b^{\cdot})$, dan $F(2f(x)\ sin\ (N\pi/L)x) = (a'',b'')$. Maka $a^*_0 = a^\wedge_0$, $a^*_n = (a^\wedge_n-b'_n)/2$, $b^*_n = (b^{\cdot}_n + a''_n)/2$.	Misalkan M bilangan bulat tak nol dan f adalah sebuah fungsi-L dengan $G(f) = c$, serta $G(f(x)e^{-i(M\pi/L)x}) = c^\wedge$. Misalkan $c^*_n = c^*_{n+M}$ untuk setiap bilangan bulat n. Maka $c^* = c^\wedge$.

* Definisi turunan barisan-L (a,b) dapat didefinisikan dengan berbagai cara yang berbeda.

** Definisi integral barisan-L (a,b) di sini berkaitan dengan pilihan definisi turunannya.