# PEMODELAN DAN PENYELESAIAN PEMROGRAMAN LINEAR DENGAN KOEFISIEN FUNGSI OBJEKTIF BERBENTUK BILANGAN KABUR SEGITIGA

**Sani Susanto[1)]**

**Hari Adianto[2)]**

[1)]KBI Management Science, Jurusan Teknik Industri, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Katolik Parahyangan
Jalan Ciumbuleuit 94, Bandung – 40141
Tlp/Fax: (022) 232700 E-mail: ssusanto@home.unpar.ac.id

[2)]Jurusan Teknik Industri, Institut Teknologi Nasional
Jalan Penghulu H. Hasan Mustofa 23, Bandung – 40192
Tlp/Fax: (022) 7272215 Fax: (022)7202892 E-mail: hari@itenas.ac.id

## ABSTRACT

*There are three parameters associated with each Linear Programming Model, one of which is the objective function coefficient. This coefficient describes the contribution of one unit of the associate decision variable to the value of the objective function value. In the traditional Linear Programming Model, it is assumed that the values of the objective function coefficients are crisp or certain. This article discuses an approach to formulate and to solve a Linear Programming Model in the case the objective function coefficients are in the form of triangular fuzzy number*

*Keywords: Linear Programming Model, Linear Programming Parameter, Fuzzy Number, Objective Function Coefficient, Triangular Fuzzy Number*

## PENDAHULUAN

Sejak dikembangkan oleh George Dantzig pada tahun 1947, Model Pemrograman Linear (MPL) telah digunakan dalam pemecahan masalah optimasi di pelbagai sektor industri dan jasa. Bahkan survey kepada perusahaan yang pernah dilakukan oleh Fortune 500 menunjukkan 85% dari respondennya menggunakan MPL (Winston, 2003)

MPL tersusun atas dua komponen utama yaitu fungsi objektif dan kendala. Fungsi objektif berkaitan dengan tujuan yang hendak dicapai. Fungsi ini akan dimaksimumkan misalnya bila menyatakan keuntungan, atau diminimumkan bila berkaitan dengan ongkos produksi yang harus dikeluarkan. Fungsi objektif adalah fungsi dari beberapa variabel yang disebut variabel keputusan. Pada realitanya keseluruhan variabel keputusan ini harus memenuhi satu set pertidaksamaan yang disebut kendala.

Setiap MPL memiliki 3 buah parameter, yaitu **koefisien**

**fungsi objektif** (KFO) yang terdapat pada fungsi objektif, serta **koefisien teknologi** dan **koefisien ruas kanan** yang keduanya terdapat pada kendala. KFO yang selama ini dikenal dalam pembahasan MPL bersifat tegas. Tulisan ini akan membahas suatu pendekatan baru terhadap MPL dengan KFO yang bersifat kabur (*fuzzy*).

## LANDASAN TEORI

Pemodelan Pemrograman Linear dengan Koefisien Fungsi Objektif berbentuk Bilangan Kabur Segitiga memerlukan beberapa konsep sebagai landasan teorinya. Konsep yang dimaksud meliputi bentuk umum model pemrograman linear, asumsi pada model pemrograman linear serta konsep bilangan kabur.

### Bentuk Umum Model Pemrograman Linear dan Ilustrasinya

Secara ringkas MPL beserta kedua komponen utama (fungsi objektif dan kendala) dan ketiga parameternya (*koefisien fungsi objektif* (KFO), *koefisien teknologi* serta *ruas kanan*) dapat dinyatakan dalam model matematika berikut ini:

maksimasi $\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (1)

terhadap kendala

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

(Catatan: "maksimasi" dapat diubah jadi "minimasi", dan "≤" pada (2) dapat diubah menjadi "≥" atau "=")

Dalam hal ini :

- vektor kolom
  $\mathbf{x} = (x_1 \ \cdots \ x_j \ \cdots \ x_n)^T$
  disebut *vektor keputusan*,
- $x_j$ disebut *variabel keputusan* ke-j,
- vektor baris
  $\mathbf{c} = (c_1 \ \cdots \ c_j \ \cdots \ c_n)$
  disebut *vektor koefisien fungsi objektif*,
- $c_j$ adalah *koefisien fungsi objektif* (KFO) dari *variabel keputusan* ke-j
- $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ adalah *matriks koefisien teknologi*
- $a_{ij}$ adalah *koefisien teknologi* dari *variabel keputusan* ke-j pada kendala ke-i,
- vektor kolom
  $\mathbf{b} = (b_1 \ \cdots \ b_i \ \cdots \ b_m)^T$
  disebut *vektor ruas kanan*
- $b_i$ adalah *koefisien ruas kanan* pada kendala ke-i
- j = 1,2,...,n (n = jumlah kendala), dan i =1,2,...,m (m = jumlah variabel keputusan)

Sebagai ilustrasi, tinjau masalah berikut, yaitu modifikasi dari (Wang, 1992):

*Perusahaan Doll, Inc. membuat dua macam boneka, yaitu Boneka I (ukuran besar) dan Boneka II (sedang). Boneka I dan II masing-masing memberikan keuntungan Rp 4000 dan Rp 3000 per buah. Untuk pembuatannya Boneka I memerlukan 2 unit bahan baku dan 1 jam kerja. Boneka II memerlukan 1 unit bahan baku dan 1 jam kerja. Tersedia 500 jam kerja dan 400 unit bahan baku. Doll, Inc. memerlukan model yang memberi keuntungan maksimum.*

Untuk memodelkan masalah ini ditempuh langkah-langkah berikut:

- definisikan **variabel keputusan**nya, yaitu :

$x_1$ = jumlah Boneka I yang akan dibuat

$x_2$ = jumlah Boneka II yang akan dibuat

- rumuskan **fungsi objektif**nya, yaitu maksimumkan $z = 4000x_1 + 3000x_2$
- rumuskan **kendala**nya, yaitu :

  kendala jumlah jam kerja:

  $2x_1 + x_2 \leq 500$

  kendala jumlah bahan baku: $x_1 + x_2 \leq 400$

  kendala nonnegativitas dari **variabel keputusan:**

  $x_1, x_2 \geq 0$

Secara kompak, MPL dari masalah Doll, Inc., adalah sebagai berikut:

maksimumkan

$z = 4000x_1 + 3000x_2$ dengan kendala:

$2x_1 + x_2 \leq 500$

$x_1 + x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

Mengacu pada persamaan (1) dan pertaksamaan (2), didapatkan:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$,

$\mathbf{c} = (4000 \quad 3000)$,

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = (500,400)^T$

Pemecahan masalah Doll, Inc. dan umumnya MPL dapat diperoleh secara manual melalui Metode Simpleks, atau dengan bantuan perangkat lunak seperti LINDO, QSB dan lain-lain.

## ASUMSI PADA MODEL PEMROGRAMAN LINEAR

Terdapat 4 (empat) asumsi yang dikenal dalam Model Pemrograman Linear, yaitu Asumsi Proporsionalitas, Asumsi Aditivitas, Asumsi Divisibilitas serta Asumsi Ketertentuan. (Winston, 2004). Kecuali Asumsi Divisibilitas, pembahasan MPL selama ini menuntut dipenuhinya ketiga asumsi yang lain.

Asumsi Ketertentuan (tepatnya Asumsi Ketertentuan Paramater) menuntut tertentunya nilai semua parameter pada MLP. Pada kasus Doll, Inc. asumsi ini telah dipenuhi karena untuk:

- parameter KFO, komponen **c** sudah tertentu nilainya, yaitu tepat 4000 dan tepat 3000,
- parameter koefisien teknologi, komponen matriks **A** sudah tertentu nilainya, yaitu tepat 2, tepat 1, tepat 1 dan tepat 1, dan
- parameter koefisien ruas kanan, komponen vektor **b** sudah tertentu nilainya, yaitu tepat 500 dan tepat 400.

Tulisan ini ditujukan bagi perumusan MPL dalam hal Asumsi Ketertentuan tidak dipenuhi, lebih spesifik lagi, dalam hal parameter KFO tidak memenuhi Asumsi Ketertentuan.

## Bilangan Kabur

Ketika kita berbicara tentang jumlah roda pada sebuah sepeda motor, jumlah jendela pada suatu mobil sedan, jumlah senar pada sebuah gitar, jumlah halaman pada suatu buku, kita dihadapkan pada jumlah yang sudah tertentu, yaitu **tepat** 2 (dua) buah, **tepat** 4 (empat) buah, **tepat** 6 (enam) buah, **tepat** 200 (dua ratus) halaman.

Sangat berbeda halnya ketika kita berbicara tentang:

- jam kedatangan koran langganan, mungkin kita akan berkata **sekitar** pukul 5.30
- volume air kemasan dalam botol, mungkin kita akan berkata **kira-kira** 500 mililiter
- waktu tempuh Bandung-Jakarta, mungkin kita akan berkata **hampir** 200 menit
- biaya bahan baku pembuatan sebuah *compact disc* kosong kualitas rendah, mungkin kita akan berkata **kurang lebih** Rp 1200.

Banyak hal, dan agaknya ini yang lebih sering terjadi, dalam dunia nyata yang tidak memungkinkan kita untuk menggunakan frase **tepat sekian**, melainkan harus puas dengan menggunakan beberapa frase berikut ini yang menggambarkan **ketidaktepatan**, seperti **sekitar sekian, kira-kira sekian, hampir sekian, kurang lebih sekian** dan sejenisnya.

Disiplin Matematika memberikan konsep untuk menggambarkan situasi ketika **ketidaktepatan** menjadi tak terelakkan lagi. Konsep tersebut diperkenalkan pertama kali oleh Lotfi Zadeh, berdarah Iran, pada tahun 1965 melalui tulisan legendarisnya yang berjudul *Fuzzy Sets* yang dimuat pada jurnal internasional **Information Control** halaman 338-353 (Wang, 1997). Nama dari konsep itu bervariasi, ada yang menyebutnya **Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, Fuzzy Mathematics.** Istilah ***fuzzy*** pun belum mendapatkan kesatuan pendapat dalam hal terjemahannya. Ada peneliti yang menterjemahkannya sebagai **kabur, tidak tegas, halus.** Dalam tulisan ini dipilih padanan **kabur** untuk kata **fuzzy.** Secara intuitif sebagian dari konsep **Fuzzy Logic** akan digunakan, konsep yang dimaksud tersebut adalah yang berkaitan dengan **bilangan kabur.**

Tinjau himpunan A, himpunan bilangan yang sama dengan 3, jadi A= {3}. Himpunan ini hanya memiliki sebuah anggota, yaitu 3. Himpunan ini dicirikan oleh sutau fungsi, yang disebut **fungsi karakteristik** dari himpunan A, yaitu $\chi_A(x)$ yang persamaannya adalah:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x = 3 \\ 0, \text{jika } x \neq 3 \end{cases}$$

Fungsi karakteristik ini memberikan **derajat keanggotaan** kepada setiap unsur di himpunan semesta. Misalnya bilangan 3 memiliki derajat keanggotaan penuh, yaitu 1, terhadap himpunan A. Bilangan 5, 4, 2, 1 sama sekali tak memiliki derajat keanggotaan sedikitpun terhadap himpunan A, artinya derajat keanggotaannya adalah 0. Demikian pula terhadap bilangan berikut ini, yang sebenarnya cukup dekat nilainya terhadap bilangan 3, yaitu:

3.1; 3.01; 3.001; 2.999; 2.99; 2.9

Sekalipun bilangan - bilangan ini cukup mendekati 3, namun terhadap himpunan A bilangan ini berderajat keanggotaan 0. Himpunan yang hanya mengenal dua jenis relasi antara suatu unsur dengan suatu himpunan, yaitu:

suatu unsur adalah anggota dari suatu himpunan,

atau

suatu unsur adalah bukan anggota suatu himpunan, dan tidak mengenal relasi di antara kedua ekstrim ini, disebut **himpunan tegas.** Pada himpunan jenis ini, hanya dikenal dua jenis derajat keanggotaan yaitu keanggotaan penuh dengan nilai fungsi karakteristik sebesar 1, serta ketidakanggotaan sama sekali.

Berbeda dengan **himpunan tegas, himpunan kabur**, mengenal konsep **keanggotaan sebagian**. Sebagai contoh, sekalipun tidak sebesar derajat keanggotaan bilangan 3, bilangan 3.1 atau 2.9 masih mendapat semacam pengakuan untuk menjadi anggota himpunan A, misalnya saja masing-masing derajat keanggotaan 0.9. Bila himpunan nilai derajat keanggotaan himpunan tegas adalah himpunan biner {0,1}, maka himpunan nilai derajat keanggotaan himpunan kabur ada pada interval tertutup [0,1].

Himpunan bilangan yang nilainya **sekitar** 3, atau **kira-kira** 3, atau **hampir** 3, atau **kurang lebih** 3 adalah contoh himpunan kabur, yang sering pula disebut **bilangan kabur** 3. Terdapat dua jenis bilangan kabur yang sering dipakai dalam praktek, yaitu **bilangan kabur segitiga** dan **bilangan kabur trapesium** (Wang, 1997).

**Bilangan kabur segitiga** b, dilambangkan dengan $\bar{b}$, adalah himpunan kabur dengan **batas bawah** a dan **batas atas** c serta fungsi keanggotaan segitiga, yang didefinisikan sebagai:

$$\mu_b(x;a,b,c)=\begin{cases}(x-a)/(b-a), \text{jika } a\le x<b\\ (c-x)/(c-b), \text{jika } b\le x\le c\\ 0, \text{jika } x>c \text{ atau } x<a\end{cases} \quad (4)$$

Bilangan kabur segitiga $\bar{b}$ pada (4) seringkali pula dilambangkan dengan

$\bar{b}=(b^-,b^0,b^+)$

atau

$$\bar{b}=(a,b,c) \quad (5)$$

dalam hal ini

$b^-=a,\ b^0=b \text{ dan } b^+=c$.

Sebagai contoh bilangan kabur segitiga 3, atau $\bar{3}$, secara subjektif, dapat didefinisikan melalui fungsi keanggotaan:

$$\bar{3}=\mu_3(x;2.5,3,4)$$

$$=\begin{cases}2(x-2.5), \text{jika } 2.5\le x<3\\ -(4-x), \text{ jika } 3\le x<4\\ 0, \text{jika } x>4 \text{ atau } x<2.5\end{cases}$$

$$=(3^-,3^0,3^+)=(2.5,\ 3,\ 4)$$

Pada himpunan bilangan kabur segitiga 3, atau $\bar{3}$, derajat keanggotaan beberapa anggotanya disajikan pada Tabel-1.

## Pemodelan Pemrograman Linear dengan Koefisien Fungsi Objektif Kabur

MPL yang terdiri atas fungsi objektif (1) dan kendala (2) akan menjadi Model Pemrograman Linear dengan Koefisien Fungsi Objektif Kabur (MPLKFOK) bila nilai-nilai parameter KFO merupakan bilangan kabur.

Berikut ini adalah langkah-langkah yang berkaitan dengan pembentukan MPLKFOK dan pemecahannhya. Langkah-1 sampai dengan Langkah-4 merupakan langkah pembentukannya, sedangkan Langkah 5 dan Langkah-6 adalah pemecahannya.

**Langkah-1**: Tentukan MPL yang akan diubah ke dalam MPLKFOK (dalam hal ini adalah masalah (1) dengan kendala (2) dan (3))

**Langkah-2**: Tentukan jenis bilangan kabur bagi setiap KFO (akan dipilih bilangan kabur segitiga (4))

Tabel 1. Beberapa nilai derajat keanggotaan dari himpunan bilangan kabur segitiga 3 ($\bar{3}$)

| X | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3 | 3.2 | 3.4 | 3.6 | 3.8 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_3(x;2.5,3,4)$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 | 0.2 | 0 |

**Langkah-3**: Tentukan:

a) $\bar{\mathbf{c}} = (\overline{c_1} \ \cdots \ \overline{c_j} \ \cdots \ \overline{c_n})$ vektor koefisien fungsi objektif kabur(KFOK) yaitu vektor yang unsur-unsurnya adalah KFO yang difuzzykan,

b) vektor-vektor yang merupakan komponen dari KFOK, yaitu $\overline{c_j}$.

c) vektor-vektor $\mathbf{c}^-, \mathbf{c}^0$ dan $\mathbf{c}^+$ yang komponen-komponennya berturut - turut adalah batas bawah KFO, KFO itu sendiri serta batas atas KFO.

**Langkah-4**: Rumuskan pemrograman linear bertujuan majemuk berfungsi tujuan memaksimumkan nilai bilangan kabur segitiga, sebagai berikut:

$$\text{maksimasi}\, z = (\mathbf{c}^-\mathbf{x}, \mathbf{c}^0\mathbf{x}, \mathbf{c}^+\mathbf{x})$$

dengan kendala

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

**Langkah-5**: *Untuk memecahkan masalah pada Langkah-4 ubah masalah tersebut menjadi:*

$$\min z_1 = (\mathbf{c}^0 - \mathbf{c}^-)\mathbf{x}, \max z_2 = \mathbf{c}^0\mathbf{x}, \max z_3 = (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^0)\mathbf{x}$$

dengan kendala

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

**Langkah-6**: *Untuk memecahkan masalah pada Langkah-5 ditempuh sub-langkah berikut ini:*

**Sub-langkah 6-1:**

*Tentukan nilai-nilai berikut ini:*

- $z_1^{\min} = \min\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} (\mathbf{c}^0 - \mathbf{c}\ )\mathbf{x}$
- $z_1^{\max} = \max\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} (\mathbf{c}^0 - \mathbf{c}\ )\mathbf{x}$
- $z_2^{\max} = \max\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} \mathbf{c}^0\mathbf{x}$
- $z_2^{\min} = \min\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} \mathbf{c}^0\mathbf{x}$
- $z_3^{\max} = \max\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^0)\mathbf{x}$
- $z_3^{\min} = \min\limits_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^0)\mathbf{x}$

**Sub-langkah 6-2:**

Definisikan ketiga fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{ jika } (c^0 - c^-)x < z_1^{\min} \\ \dfrac{z_1^{\max} - (c^0 - c^-)x}{z_1^{\max} - z_1^{\min}} & ,\text{ jika } z_1^{\min} \le (c^0 - c^-)x \le z_1^{\max} \\ 0 & ,\text{ jika } (c^0 - c^-)x > z_1^{\max} \end{cases}$$

$$\mu_{z_2}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{ jika } c^0x > z_2^{\max} \\ \dfrac{c^0x - z_2^{\min}}{z_2^{\max} - z_2^{\min}} & ,\text{ jika } z_2^{\min} \le c^0x \le z_2^{\max} \\ 0 & ,\text{ jika } c^0x < z_2^{\min} \end{cases}$$

$$\mu_{z_3}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{ jika } (c^+ - c^0)x > z_3^{\max} \\ \dfrac{(c^+ - c^0)x - z_3^{\min}}{z_3^{\min} - z_3^{\max}} & ,\text{ jika } z_3^{\min} \le (c^+ - c^0)x \le z_3^{\max} \\ 0 & ,\text{ jika } (c^+ - c^0)x < z_3^{\min} \end{cases}$$

**Sub-langkah 6-3:**

Definisikan masalah LP berikut ini:

$$\max_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} \min\{\mu_{z_1}(x), \mu_{z_2}(x), \mu_{z_3}(x)\}$$

dan definisikan pula :

$$\alpha = \min\{\mu_{z_1}(x), \mu_{z_2}(x), \mu_{z_3}(x)\}$$

**Sub-langkah 6-4:**

Dapatkan masalah berikut (yang ekivalen dengan masalah Sub-langkah 6-3):

$$\max \alpha$$

dengan kendala

$$\mu_{z_1}(x) \ge \alpha \text{ atau } \alpha(z_1^{\max} - z_1^{\min}) + (c^0 - c^-)x$$

$$\mu_{z_{12}}(x) \ge \alpha \text{ atau } c^0x - \alpha(z_2^{\max} - z_2^{\min}) \ge z_2^{\min}$$

$$\mu_{z_3}(x) \ge \alpha \text{ atau } (c^+ - c^0)x - \alpha(z_3^{\max} - z_3^{\min}) \ge z_3^{\min}$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

**Ilustrasi Numerik Pemodelan Pemrograman Linear dengan Koefisien Fungsi Objektif Kabur, Penyelesaian serta Interpretasinya**

Akan digunakan masalah Doll.Inc. sebagai ilustrasi MPLKFOK.

**Langkah-langkah Pembentukan MPLKFOK :**

**Langkah-1**: Sebagai ilustrasi dapat dipilih masalah Doll, Inc., yaitu:

maksimumkan

$$z = 4000x_1 + 3000x_2$$

dengan kendala:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Langkah-2**: Untuk kasus Doll, Inc. perlu dipilih fungsi keanggotaan untuk mendefinisikan bilangan kabur untuk parameter KFO 4000 dan 3000. Misalkan untuk KFO 4000 dipilih bilangan kabur segitiga dengan fungsi berikut:

$$\overline{4000} = \mu_{4000}(x; 3750, 4000, 4500) = \begin{cases} (x-2750)/250, \text{ jika } 3750 \leq x < 4000 \\ (4500-x)/500, \text{ jika } 4000 \leq x \leq 4500 \\ 0, \text{ jika } x > 4500 \text{ atau } x < 3750 \end{cases}$$

Sedang untuk KFO 3000 dipilih bilangan kabur segitiga dengan fungsi berikut:

$$\overline{3000} = \mu_{3000}(x; 2500, 3000, 3500) = \begin{cases} (x-2500)/500, \text{ jika } 2500 \leq x < 3000 \\ (3500-x)/500, \text{ jika } 3000 \leq x \leq 3500 \\ 0, \text{ jika } x > 3500 \text{ atau } x < 2500 \end{cases}$$

**Langkah-3**: Untuk kasus Doll, Inc. didapatkan vektor-vektor berikut:

$$\bar{c} = (\overline{c_1} \quad \overline{c_2}) = (\overline{4000} \quad \overline{3000})$$

$$\begin{aligned} \overline{c_1} = \overline{4000} &= (4000^- \quad 4000^0 \quad 4000^+) \\ &= (3750 \quad 4000 \quad 4500) \\ &= (c_1^- \quad c_1^0 \quad c_1^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{c_2} = \overline{3000} & \\ &= (3000^- \quad 3000^0 \quad 3000^+) \\ &= (2500 \quad 3000 \quad 3500) \\ &= (c_2^- \quad c_2^0 \quad c_2^+) \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}^- = (c_1^- \quad c_2^-) = (3750 \quad 2500)$$

$$\mathbf{c}^0 = (c_1^0 \quad c_2^0) = (4000 \quad 3000)$$

$$\mathbf{c}^+ = (c_1^+ \quad c_2^+) = (4500 \quad 3500)$$

**Langkah-4**: Untuk kasus Doll, Inc. didapatkan masalah berikut:

maksimasi z =

$$z = \left(2750x_1 + 2500x_2, 4000x_1 + 3000x_2, 4500x_1 + 3500x_2\right)$$

**dengan kendala:**

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Langkah - langkah Penyelesaian MPLKFOK**

**Langkah-5**: Untuk kasus Doll, Inc. didapatkan:

$$\min \; z_1 = 250x_1 + 500x_2,$$

$$\max \quad z_2 = 4000x_1 + 3000x_2,$$

$$\max \quad z_3 = 500x_1 + 500x_2$$

dengan kendala

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Langkah-6**:

**Sub-langkah 6-1**:

Untuk kasus Doll, Inc., didapatkan nilai-nilai berikut ini:

$$\begin{aligned} z_1^{\min} &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (\mathbf{c}^0 - \mathbf{c}^-)\mathbf{x} \\ &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (250x_1 + 500x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1^{\max} &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (\mathbf{c}^0 - \mathbf{c}^-)\mathbf{x} \\ &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (250x_1 + 500x_2) \\ &= 200\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2^{\max} &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} \mathbf{c}^0\mathbf{x} \\ &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (4000x_1 + 3000x_2) \\ &= 1\,300\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2^{\min} &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} \mathbf{c}^0\mathbf{x} \\ &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (4000x_1 + 3000x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3^{\max} &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^0)\mathbf{x} \\ &= \max_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (500x_1 + 500x_2) \\ &= 200\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3^{\min} &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^0)\mathbf{x} \\ &= \min_{x \in X = \{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}} (500x_1 + 500x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Sub-langkah 6-2:**

Untuk kasus Doll, Inc. didapatkan:

$$\mu_{z_1}(x) = \mu_{z_1}(x_1, x_2)$$
$$= \begin{cases} 1 & , \text{jika } (250x_1 + 500x_2) < 0 \\ \dfrac{200000 - (250x_1 + 500x_2)}{200000} & , \text{jika } 0 \le (250x_1 + 500x_2) \le 200000 \\ 0 & , \text{jika } (250x_1 + 500x_2) > 200000 \end{cases}$$

$$\mu_{z_2}(x) = \mu_{z_2}(x_1, x_2)$$
$$= \begin{cases} 1 & , \text{jika } 4000x_1 + 3000x_2 > 1300000 \\ \dfrac{4000x_1 + 3000x_2}{1300000} & , \text{jika } 0 \le 4000x_1 + 3000x_2 \le 130000 \\ 0 & , \text{jika } 4000x_1 + 3000x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\mu_{z_3}(x) = \mu_{z_3}(x_1, x_2)$$
$$= \begin{cases} 1 & , \text{jika } 500x_1 + 500x_2 > 200000 \\ \dfrac{500x_1 + 500x_2}{200000} & , \text{jika } 0 \le 500x_1 + 500x_2 \le 200000 \\ 0 & , \text{jika } 500x_1 + 500x_2 < 0 \end{cases}$$

**Sub-langkah 6-3:**

Definisikan masalah LP berikut ini:

$$\max_{x \in X = \{x \mid Ax \le b,\, x \ge 0\}} \min\{\mu_{z_1}(x), \mu_{z_2}(x), \mu_{z_3}(x)\}$$

dan

$$\alpha = \min\{\mu_{z_1}(x), \mu_{z_2}(x), \mu_{z_3}(x)\}$$

**Sub-langkah 6-4:**

Untuk kasus Doll, Inc. didapatkan masalah:

$\max \alpha$ dengan kendala

$$200000\alpha + 250x_1 + 500x_2 \le 200000$$
$$4000x_1 + 3000x_2 - 1300000\alpha \ge 0$$
$$500x_1 + 500x_2 - 200000\alpha \ge 0$$
$$0 \le \alpha \le 1$$
$$2x_1 + x_2 \le 500$$
$$x_1 + x_2 \le 400$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

## Interpretasi Penyelesaian MPLKFOK

Dengan bantuan perangkat lunak WinQSB didapatkan solusi terhadap MPLKFOK yaitu :

$$\alpha = 0.5333, \; x_1 = 53.3333 \quad x_2 = 160$$

Artinya Doll, Inc. disarankan untuk membuat Boneka I dan II berturut-turut 53.3333 unit dan 160 unit.

Bila saran ini diikuti oleh Doll, Inc., maka dari Sub-langkah 6-2 didapatkan:

$$\mu_{z_1}(x) = \mu_{z_1}(53.3333, 160) = 0.5333$$

$$\mu_{z_2}(x) = \mu_{z_2}(53.3333, 160) = 0.5333$$

$$\mu_{z_3}(x) = \mu_{z_3}(53.3333, 160) = 0.5333$$

sehingga dari definisi pada Sub-langkah 6-3 didapatkan nilai :

$$\alpha = \min\{\mu_{z_1}(x), \mu_{z_2}(x), \mu_{z_3}(x)\}$$
$$= \min\{0.5333, 0.5333, 0.5333\}$$
$$= 0.5333$$

Selanjutnya dari Langkah-5 akan didapatkan nilai-nilai:

$$z_1 = 250x_1 + 500x_2 = 93\,333.3333$$

$$z_2 = 4000x_1 + 3000x_2 = 693\,333.3333$$

$$z_3 = 500x_1 + 500x_2 = 106\,666.6667$$

Artinya, bila saran diikuti oleh Doll, Inc., maka di tengah ketidakmenentuan keuntungan per unit boneka, *tingkat keuntungan minimum* perusahaan ini dijamin akan berkisar antara:

batas bawah

$= z_2 - z_1$

= \$(693 333.3333-93 333.3333)

= \$ 600

batas atas

$= z_2 + z_3$

= \$(693 333.333+106 666.6667)

= \$ 800

Namun demikian *tingkat keuntungan minimum* yang bersifat paling boleh jadi adalah sekurang - kurangnya sebesar \$693 333.3333.

Di atas telah didapatkan nilai $\alpha = 0.5333$, nilai ini berkaitan dengan nilai *tingkat keuntungan minimum* sebesar \$ 693 333.3333. Artinya "derajat keboleh-jadian" terhadap perolehan solusi yang berkaitan dengan *tingkat keuntungan minimum* ini adalah 0.5333. Sebagai perbandingan, "derajat kebolehjadian" bagi tercapainya *tingkat keuntungan minimum* yang maksimum, yaitu $ 800, adalah 0, sedangkan "derajat kebolehjadian" bagi tercapainya *tingkat keuntungan minimum* yang minimum, yaitu $ 600, adalah 1.

## PENUTUP

Langkah-langkah pemodelan dan penyelesaian pemrograman linear dengan koefisien fungsi objektif berbentuk bilangan kabur segitiga mengembalikan Masalah Pemrograman Linear dengan Koefisien Fungsi Objektif Kabur menjadi masalah pemrograman linear biasa. Sekalipun demikian, MPLKFOK memiliki keunggulan atas masalah pemrograman linear biasa. Keunggulan itu adalah dalam kemampuannya untuk mengakomodasi pelanggaran terhadap asumsi ketertentuan pada koefisien fungsi objektif. Kemampuan mengakomodasi pelanggaran ini menjadi penting, karena seringkali pada realitanya koefisien ini dinyatakan dalam frase-frase yang bersifat subjektif, seperti "sekitar", "kira-kira", "hampir" atau "kurang lebih".

Tulisan ini membahas pemodelan dan penyelesaian masalah pemrograman linear dengan fungsi objektif berbentuk bilangan kabur segitiga. Dari bahasan ini dapat disampaikan beberapa butir saran penelitian lebih lanjut berikut ini:

1. Pemodelan dan Penyelesaian masalah serupa untuk kasus koefisien fungsi objektif adalah bilangan kabur jenis lain, seperti bilangan kabur trapesium, bilangan kabur bahu kiri, bilangan kabur bahu kanan dan lain-lain
2. Pemodelan dan Penyelesaian masalah serupa untuk kasus fungsi objektifnya berbentuk minimasi
3. Penyusunan analisis sensitivitas serta bentuk dual dan analisis lebih lanjut dari Model Pemrogramán Linear Kabur

## DAFTAR PUSTAKA


Lai, Y.J., and Hwang, C.L. **Fuzzy Mathematical Programming**. Springer-Verlag. New York. 1997.

Wang, L.-X. **A Course in Fuzzy Systems and Control**. Prentice-Hall Int. London. 1997.

Werner, B. **An interactive fuzzy programming system.** Fuzzy Sets and Systems. Vol. 23. pp. 131-147. 1987.

Winston, W.L. **Operations Research: Applications and Algorithms**. Edisi-4. International Thomson Publishing. Belmont. California.2003.